

Réponses de l'interrogation 03

Bijections

1. (a) Définir une fonction injective, surjective, bijective.

Solution. Soient $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{F}(U, V)$.

- On dit que f est injective sur U si et seulement si

$$\forall (x, y) \in U^2, \quad (f(x) = f(y)) \quad \Rightarrow \quad (x = y).$$

- On dit que f est surjective sur V si et seulement si

$$\forall y \in V, \exists x \in U, \quad y = f(x).$$

- On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si

$$\forall y \in V, \exists! x \in U, \quad y = f(x).$$

- (b) Énoncer le théorème de la bijection.

Solution. Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Si

- f est continue sur I ,
- et strictement monotone sur I ,

alors f définit une bijection de I dans $J = f(I)$. De plus sa réciproque f^{-1} est une bijection de J dans I , continue et strictement monotone sur J (de même monotonie que f).

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto (x-5)e^{2x}$. Déterminer $f([1; 5])$ puis $f^{-1}]-\infty; 0]$ puis préciser si f est injective, surjective et/ou bijective.

Solution. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	$\frac{9}{2}$	5	$+\infty$
f	0	$-4e^2$	$-\frac{e^9}{2}$	0	$+\infty$

Puisque $-4e^2 < 0$, on conclut que

$$f([1; 5]) = \left[-\frac{e^9}{2}; 0\right] \quad \text{et} \quad f^{-1}]-\infty; 0] =]-\infty; 5].$$

Conclusion,

la fonction f n'est ni injective, ni surjective, et donc ni bijective.

3. Montrer que $f : x \mapsto x^2 e^{2x}$ définit une bijection de $[0; +\infty[$ dans un ensemble J à déterminer puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{0\}$ et établir une expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} .

Solution.

la fonction f définit une bijection de $[0; +\infty[$ dans $J = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right[= [0; +\infty[$.

Conclusion, f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall y \in]0; +\infty[, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2f^{-1}(y)(f^{-1}(y) + 1)e^{2f^{-1}(y)}}.$$

4. Préciser le comportement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{x^2+3x+1}{x-5}$.

Solution. Conclusion,

le graphe de f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 8$.

5. Comparer au voisinage de 0 les fonctions $f : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $g : x \mapsto 3x^2 + x^3 e^x$.

Solution. Conclusion,

$$3x^2 + x^3 e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$