Réponses de l'interrogation 04
Trigonométrie

1. (a) Enoncer les limites remarquables du sinus et du cosinus.
   Solution. On a
   $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\sin(h)}{h} = 1, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\tan(h)}{h} = 1.$$

   (b) Donner les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions sinus, cosinus, tangente.
   Solution. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$
   La fonction tangente est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Développer $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a-b)$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = 2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)}.}$$
   Vérification : si $a = 0$, on obtient $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = -\sin(b) + \tan(b)\cos(b) = -\sin(b) + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\cos(b) = 0$ et $2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 0$ OK ! Si $b = 0$, $\sin(2a-b) + \tan(b)\cos(2a+b) = \sin(2a)$ et $2\frac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(b)} = 2\sin(a)\cos(a)$. On retrouve une formule bien connue. OK !

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser $\cos(\theta) + \cos(3\theta) + 2\sqrt{3}\cos(2\theta)\sin(\theta)$.
   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{\cos(\theta) + \cos(3\theta) + 2\sqrt{3}\cos(2\theta)\sin(\theta) = 4\cos(2\theta)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right).}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et placer les solutions sur le cercle trigonométrique.
   Solution. Conclusion, l'ensemble solution est donné par
   $$\boxed{\mathscr{S}_{(E)} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 + 2\cos(x) < \sin^2(x)$ et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique.
   Solution. Conclusion, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
   $$\boxed{1 + 2\cos(x) < \sin^2(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[.}$$