

Correction de l'interrogation 5 d'entraînement Nombres complexes

1. Restituer le cours.

1.1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{et} \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

1.2 Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') + |z'|^2.$$

1.3 Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

1.4 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1.5 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. Calculs de complexes.

2.1 On a les égalités entre complexes suivantes :

$$z = \frac{(5-i)(2-3i)}{(1+i)(1-2i)} = \frac{10-15i-2i-3}{1-2i+i+2} = \frac{7-17i}{3-i} = \frac{(7-17i)(3+i)}{9+1} = \frac{21+7i-51i+17}{10} = \frac{38-44i}{10}.$$

Conclusion,

$$z = \frac{19}{5} - i\frac{22}{5}.$$

2.2 Par la factorisation par l'angle moitié, on a

$$\begin{aligned} z &= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)^{15} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \left[e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right]\right)^{15} = e^{i5\pi} \left(2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{15} \\ &= (-1) \times \left(i\sqrt{3}\right)^{15} \\ &= -3^7 \times \sqrt{3} \times (-i) \\ &= 3^7 \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Eventuellement on peut préciser que $3^7 = 2187$. Conclusion,

$$z = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)^{15} = 3^7 \sqrt{3}i.$$

2.3 On sait que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} z &= (3-2i)^4 = 3^4 + 4 \times 3^3 \times (-2i) + 6 \times 3^2 \times (-2i)^2 + 4 \times 3 \times (-2i)^3 + (-2i)^4 \\ &= 9^2 - 8i \times 27 - 24 \times 9 + 12 \times 8i + 16 \\ &= 81 - 216i - 216 + 96i + 16 \\ &= 97 - 216 - 120i \end{aligned}$$

Conclusion,

$$z = (3-2i)^4 = -119 - 120i.$$

2.4 Puisque $2025 = 4 \times 506 + 1$, on a

$$z = \sqrt{2} e^{i \frac{2025\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i 506\pi + i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i 253 \times 2\pi} e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$z = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

2.5 On passe par la forme polaire du numérateur et du dénominateur. On a d'une part

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

D'autre part,

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{188} = \left(\frac{2 e^{i \frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}} \right)^{188} = \left(\sqrt{2} e^{i \frac{7\pi}{12}} \right)^{188} \\ &= 2^{94} e^{i \frac{47 \times 7\pi}{3}} \\ &= 2^{94} e^{i \frac{329\pi}{3}} \\ &= 2^{94} e^{i 109\pi + i \frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{94} (-1) e^{i \frac{2\pi}{3}} \\ &= 2^{94} (-1) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2^{93} (1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$z = 2^{93} - 2^{93}\sqrt{3}i.$$

3. Applications de la formule d'Euler et de la formule de Moivre.

3.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule d'Euler,

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4.$$

Or on sait que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Donc,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2^4} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} [e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6] \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sin^4(x) = \frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8}.$$

Vérification, si $x = 0$, on a $\sin^4(x) = 0$ et $\frac{\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3}{8} = \frac{1 - 4 + 3}{8} = 0$ OK!

3.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) \frac{1}{-4} (e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) (e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{-1}{32} (e^{5ix} - 2e^{3ix} + e^{ix} + 3e^{3ix} - 6e^{ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} - 6e^{-ix} + 3e^{-3ix} + e^{-ix} - 2e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{-1}{32} (2\cos(5x) - 4\cos(3x) + 2\cos(x) + 6\cos(3x) - 12\cos(x) + 6\cos(-x)) \\ &= \frac{-1}{16} (\cos(5x) + \cos(3x) - 2\cos(x)).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos^3(x) \sin^2(x) = \frac{2\cos(x) - \cos(5x) - \cos(3x)}{16}.$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{3}$, on a $\cos^3(x) \sin^2(x) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$ et $\frac{2\cos(x) - \cos(5x) - \cos(3x)}{16} = \frac{1 - \frac{1}{2} - (-1)}{16} = \frac{3/2}{16} = \frac{3}{32}$
OK!

3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre, on a

$$\cos(5x) = \operatorname{Re}(e^{5ix}) = \operatorname{Re}([\cos(x) + i\sin(x)]^5)$$

Or

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \operatorname{Re}(\cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) \\ &\quad - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x)) \\ &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) + 5\cos(x)\sin^4(x).\end{aligned}$$

De plus $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ et $\sin^4(x) = (1 - \cos^2(x))^2 = 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\cos(5x) &= \cos^5(x) - 10\cos^3(x) + 10\cos^5(x) + 5\cos(x) - 10\cos^3(x) + 5\cos^5(x) \\ &= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x).$$

Vérification : si $x = 0$, $\cos(5x) = 1$ et $16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x) = 16 - 20 + 5 = 1$ OK!

3.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Moivre,

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \operatorname{Im}(e^{4ix}) = \operatorname{Im}([\cos(x) + i\sin(x)]^4) \\ &= \operatorname{Im}(\cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x)) \\ &= 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x).$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{6}$, $\sin(4x) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x) = 4\frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{1}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ OK!

3.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la factorisation par l'angle moitié, on a

$$\begin{aligned}e^{ix} + e^{3ix} - 2\cos(x)e^{11ix} &= e^{2ix}(e^{-ix} + e^{ix}) - 2\cos(x)e^{11ix} = 2\cos(x)e^{2ix} - 2\cos(x)e^{11ix} \\ &= 2\cos(x)(e^{2ix} - e^{11ix}).\end{aligned}$$

A nouveau, par la factorisation par l'angle moitié,

$$e^{ix} + e^{3ix} - 2 \cos(x) e^{11ix} = 2 \cos(x) e^{i \frac{13x}{2}} \left(e^{-i \frac{9x}{2}} - e^{i \frac{9x}{2}} \right) = -4i \cos(x) \sin\left(\frac{9x}{2}\right) e^{i \frac{13x}{2}}.$$

Conclusion,

$$e^{ix} + e^{3ix} - 2 \cos(x) e^{11ix} = -4i \cos(x) \sin\left(\frac{9x}{2}\right) e^{i \frac{13x}{2}}.$$

3.6 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = e^{ix}$. On a les calculs suivants

$$z^2 + \bar{z}^4 = (e^{ix})^2 + (\overline{e^{ix}})^4 = e^{2ix} + (e^{-ix})^4 = e^{2ix} + e^{-4ix}.$$

Par la formule par l'angle moitié,

$$z^2 + \bar{z}^4 = e^{-ix} (e^{3ix} + e^{-3ix}) = 2 \cos(3x) e^{-ix}.$$

Conclusion,

$$z^2 + \bar{z}^4 = 2 \cos(3x) e^{-ix}.$$

4. Equations complexes.

4.1 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = \frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow (1-iz)(1-i\bar{z}) = (1+i\bar{z})(1+iz) && \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow 1-iz-i\bar{z}-|z|^2 = 1+iz+i\bar{z}-|z|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = 2i(z+\bar{z}) \\ &\Leftrightarrow z = -\bar{z}. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}.$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{-i(z+i)}{i(z-i)} = -\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow -\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad z+i = \lambda(z-i) && \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\Leftrightarrow M \in (AB). \end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B .

4.2 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = -\overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} = -\frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}} \\
 &\Leftrightarrow (1-iz)(1-i\bar{z}) = -(1+i\bar{z})(1+iz) \quad \text{car } z \neq i \\
 &\Leftrightarrow 1-iz-i\bar{z}-|z|^2 = -1-iz-i\bar{z}+|z|^2 \\
 &\Leftrightarrow 2 = 2|z| \\
 &\Leftrightarrow |z| = 1.
 \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{\frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}.}$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{-i(z+i)}{i(z-i)} = -\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1-iz}{1+iz} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow -\frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in i\mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \text{OU } z = -i \quad \text{car } z \neq i \\
 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \text{OU } M = A \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\
 &\Leftrightarrow \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M.
 \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B .

4.3 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U} &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} \times \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} \frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1+i\bar{z}-iz+|z|^2}{1-i\bar{z}+iz+|z|^2} = 1 \\
 &\Leftrightarrow 1+i\bar{z}-iz+|z|^2 = 1-i\bar{z}+iz+|z|^2 \quad \text{car } z \neq i \\
 &\Leftrightarrow 2i\bar{z} = 2iz \\
 &\Leftrightarrow z = \bar{z}.
 \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\boxed{\frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Interprétation géométrique. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ on a

$$\frac{1-iz}{1+iz} = \frac{-i(z+i)}{i(z-i)} = -\frac{z+i}{z-i}.$$

Dès lors en posant $A(-i)$, $B(i)$ et $M(z)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1-iz}{1+iz} \in \mathbb{U} &\Leftrightarrow -\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z+i| = |z-i| \quad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow AM = BM. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est la médiatrice du segment $[AB]$.

4.4 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1} = \overline{\left(\frac{z-i}{z+1} \right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1} = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} \\ &\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+1) = (\bar{z}+i)(z+1) \quad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + z - i\bar{z} - i = |z|^2 + \bar{z} + iz + i \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} = i(z + \bar{z}) + 2i \\ &\Leftrightarrow 2i\text{Im}(z) = 2i\text{Re}(z) + 2i \\ &\Leftrightarrow \text{Im}(z) = \text{Re}(z) + 1. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une droite privée d'un point : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$,

$$\boxed{\frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{a+i(1+a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\} = \{b-1+ib \mid b \in \mathbb{R}^*\} .}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(i)$ et $B(-1)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad z-i = \lambda(z+1) \quad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\Leftrightarrow M \in (AB). \end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B .

4.5 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2} = \overline{\left(\frac{z-2i}{z+2} \right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2} = \frac{\bar{z}+2i}{\bar{z}+2} \\ &\Leftrightarrow (z-2i)(\bar{z}+2) = (\bar{z}+2i)(z+2) \quad \text{car } z \neq -2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2z - 2i\bar{z} - 4i = |z|^2 + 2\bar{z} + 2iz + 4i \\ &\Leftrightarrow 2(z - \bar{z}) = 2i(z + \bar{z}) + 8i \\ &\Leftrightarrow 4i\text{Im}(z) = 4i\text{Re}(z) + 8i \\ &\Leftrightarrow \text{Im}(z) = \text{Re}(z) + 2. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient une droite privée d'un point : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$,

$$\boxed{\frac{z-2i}{z+2} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{a+i(a+2) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\} = \{b-2+ib \mid b \in \mathbb{R}^*\} .}$$

Interprétation géométrique. Posons $A(2i)$ et $B(-2)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad z-2i = \lambda(z+2) \quad \text{car } z \neq -2 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} \\ &\Leftrightarrow M \in (AB). \end{aligned}$$

L'ensemble solution est la droite (AB) privée du point B .

4.6 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1-iz}{1+iz} \right| = \sqrt{2} & \Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} \times \overline{\left(\frac{1-iz}{1+iz} \right)} = 2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1-iz}{1+iz} \frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}} = 2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1+i\bar{z}-iz+|z|^2}{1-i\bar{z}+iz+|z|^2} = 2 \\
 & \Leftrightarrow 1+i\bar{z}-iz+|z|^2 = 2-2i\bar{z}+2iz+2|z|^2 \quad \text{car } z \neq i \\
 & \Leftrightarrow 0 = 1+3i(z-\bar{z})+|z|^2 \\
 & \Leftrightarrow |z|^2 - 6\text{Im}(z) + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Posons $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. Alors

$$\left| \frac{1-iz}{1+iz} \right| = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - 6b + 1 = 0.$$

On met alors cette expression polynomiale du second degré sous forme canonique en remarquant que $b^2 - 6b$ est le début du carré $(b-3)^2$:

$$\left| \frac{1-iz}{1+iz} \right| = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + (b-3)^2 - 9 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + (b-3)^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2.$$

On reconnaît alors l'équation du cercle de centre $(0, 3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = 2\sqrt{2} \right\}.$$

NB : inutile d'enlever i car il n'est pas sur le cercle.

4.7 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} & \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1} = -\overline{\left(\frac{z-i}{z+1} \right)} \\
 & \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1} = -\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} \\
 & \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+1) = -(\bar{z}+i)(z+1) \quad \text{car } z \neq -1 \\
 & \Leftrightarrow |z|^2 + z - i\bar{z} - i = -|z|^2 - \bar{z} - iz - i \\
 & \Leftrightarrow 2|z|^2 + z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2|z|^2 + 2\text{Re}(z) - 2\text{Im}(z) = 0 \\
 & \Leftrightarrow |z|^2 + \text{Re}(z) - \text{Im}(z) = 0.
 \end{aligned}$$

Posons $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$. Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} & \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a - b = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'équation du cercle de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \frac{-1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \setminus \{-1\}.$$

Interprétation géométrique. Posons $A(i)$ et $B(-1)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ OU } z = i \quad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ OU } M = A \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B .

4.8 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2} = -\overline{\left(\frac{z-2i}{z+2}\right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2} = -\frac{\bar{z}+2i}{\bar{z}+2} \\ &\Leftrightarrow (z-2i)(\bar{z}+2) = -(\bar{z}+2i)(z+2) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2z - 2i\bar{z} - 4i = -|z|^2 - 2\bar{z} - 2iz - 4i \quad \text{car } z \neq -2 \\ &\Leftrightarrow 2|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 2i(z-\bar{z}) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 0. \end{aligned}$$

Posons $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2a - 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 = 2. \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'équation du cercle de centre $(-1, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (-1 + i)| = \sqrt{2} \right\} \setminus \{-2\}.$$

Interprétation géométrique. Posons $A(2i)$ et $B(-2)$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, posons $M(z)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{z+2} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2i}{z+2}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ OU } z = 2i \quad \text{car } z \neq -1 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ OU } M = A \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ &\Leftrightarrow \text{le triangle } ABM \text{ est rectangle en } M. \end{aligned}$$

L'ensemble solution est le cercle de diamètre AB privé du point B .

5. Inéquations trigonométriques.

5.1 Soit $x \in [0; \pi]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(x) - \cos(3x) &\leq \sqrt{3} \sin(x) \\ \Leftrightarrow -2 \sin\left(\frac{x+3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x-3x}{2}\right) &\leq \sqrt{3} \sin(x) \\ \Leftrightarrow 2 \sin(2x) \sin(x) &\leq \sqrt{3} \sin(x) \quad \text{car le sinus est impair} \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ OU } x = \pi \text{ OU } \begin{cases} x \in]0; \pi[\\ 2 \sin(2x) \leq \sqrt{3} \end{cases} &\quad \text{car } \forall u \in]0; \pi[, \sin(u) > 0. \end{aligned}$$

On sait donc que l'on a $x = 0$ et $x = \pi$ comme solution. Prenons maintenant $x \in]0; \pi[$. Alors, dans ce cas, l'équation est équivalente à

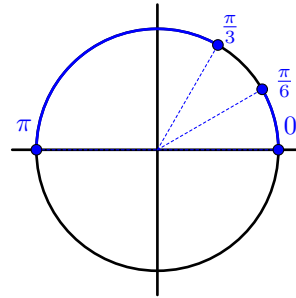
$$\sin(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On note que lorsque $x \in]0; \pi[$ alors $2x \in]0; 2\pi[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cos(x) - \cos(3x) &\leq \sqrt{3} \sin(x) &\Leftrightarrow & 0 < 2x \leq \frac{\pi}{3} \text{ OU } \frac{2\pi}{3} \leq 2x < 2\pi \\ &&\Leftrightarrow & 0 < x \leq \frac{\pi}{6} \text{ OU } \frac{\pi}{3} \leq x < \pi. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in [0; \pi]$, on a

$$\cos(x) - \cos(3x) \leq \sqrt{3} \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

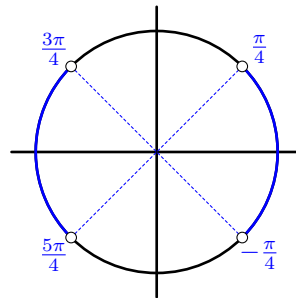


5.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &> \frac{1}{2} &\Leftrightarrow & \cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{OU} \quad \cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{OU} \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2(x) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right[.$$

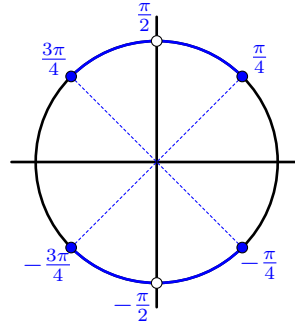


5.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \tan^2(x) - 1 &\geq 0 &\Leftrightarrow & \tan^2(x) \geq 1 \\ &&\Leftrightarrow & \tan(x) \geq 1 \quad \text{OU} \quad \tan(x) \leq -1 \\ &&\Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad \text{OU} \quad x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right]. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a

$$\tan^2(x) - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$



5.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + \sin(3x) &> \sqrt{2} &\Leftrightarrow &\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x) \right) > \sqrt{2} \\ &&\Leftrightarrow &\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(3x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(3x) > 1 &&\text{car } \sqrt{2} > 0 \\ &&\Leftrightarrow &\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1. \end{aligned}$$

Or le cosinus est majoré sur $\mathbb{R}$ par 1. Cette équation n'admet donc aucune solution.

5.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. En linéarisant on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\cos^2(x) + 4 \sin(x) \cos(x) - 3 \sin^2(x) < \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{1 + \cos(2x)}{2} + 2 \sin(2x) - 3 \frac{1 - \cos(2x)}{2} < \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow &2 \sin(2x) + \frac{4 \cos(2x) - 2}{2} < \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow &2 \sin(2x) + 2 \cos(2x) - 1 < \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow &2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x) \right) < \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(2x) < \frac{1}{2} &&\text{car } 2\sqrt{2} > 0 \\ \Leftrightarrow &\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{7\pi}{12} + 2k\pi < 2x < \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow &\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{7\pi}{24} + k\pi < x < \frac{23\pi}{24} + k\pi. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\cos^2(x) + 4 \sin(x) \cos(x) - 3 \cos^2(x) < \sqrt{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{7\pi}{24} + k\pi; \frac{23\pi}{24} + k\pi \right[.$$

