L2 MTH1314 2014-2015

Devoir Maison n°3
A rendre pour le 19 Décembre

Exercice 1. Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction suivante,

$$F = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}.$$

Exercice 2. On considère l'élément de S_8: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme un produit de 12 transpositions ?

Exercice 3. Soit G un groupe fini de cardinal n.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, l'application $\tau_g : G \to G$ qui à x associe gx est une bijection.
2. On note S_G l'ensemble des bijections de G dans G. Montrer que l'application $\tau : G \to S_G$ qui à g associe τ_g est un morphisme injectif.
3. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de S_G.
4. *Bonus !* On indice les éléments de G de la façon suivante : $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. On pose $\varphi : S_n \to S_G$ l'application qui à σ associe la bijection u définie par, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u(x_i) = x_{\sigma(i)}$. Montrer que φ est un isomorphisme. Et en déduire que G est isomorphe à un sous-goupe de S_n.