

TD 4, Exercice 5, F_3

Il y avait bien une astuce. Nous avons bien travaillé les éléments que l'on pouvait deviner en TD et c'est l'essentiel à retenir. Voici pour ceux que ça intéresse la solution pour F_3 . Je rappelle que théoriquement la décomposition s'écrit,

$$F_3 = \frac{X^3 + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)^3} = \frac{a}{X - 1} + \frac{b_1X + c_1}{X^2 + 1} + \frac{b_2X + c_2}{(X^2 + 1)^2} + \frac{b_3X + c_3}{(X^2 + 1)^3}.$$

On essaye de réduire le degré de $(X^2 + 1)$ car c'est bien lui qui nous embête. Pour ce faire on effectue la division euclidienne du numérateur par $(X^2 + 1)$. On trouve,

$$X^3 + 1 = (X^2 + 1)X - X + 1.$$

Donc, et c'est un peu magique,

$$F_3 = \frac{X^3 + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)^3} = \frac{(X^2 + 1)X}{(X - 1)(X^2 + 1)^3} + \frac{-X + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)^3} = \frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2} - \frac{1}{(X^2 + 1)^3}$$

Pose

$$G_3 := \frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2},$$

que l'on décompose plus facilement,

$$G_3 = \frac{a}{X - 1} + \frac{b_1X + c_1}{X^2 + 1} + \frac{b_2X + c_2}{(X^2 + 1)^2}.$$

On fait de même qu'en TD,

$$a = (X - 1)G_3(X)|_{X=1} = 1/4,$$

$$b_2i + c_2 = (X^2 + 1)^2 G_3(X)|_{X=i} = \frac{i}{i - 1} = \frac{i(-1 - i)}{1 + 1} = \frac{1 - i}{2}.$$

Puisque l'on considère la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$, b_2 et c_2 sont réels, donc

$$b_2 = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

D'autre part,

$$XG_3(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} a + b_1 \quad \text{et} \quad XG_3(X) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi,

$$b_1 = -a = -\frac{1}{4}.$$

On termine par une évaluation en 0,

$$G_3(0) = 0 = -a + c_1 + c_2 = -\frac{1}{4} + c_1 + \frac{1}{2}$$

D'où

$$c_1 = -\frac{1}{4}.$$

On obtient,

$$G_3 = \frac{1/4}{X - 1} + \frac{(-1/4)X - 1/4}{X^2 + 1} + \frac{(-1/2)X + 1/2}{(X^2 + 1)^2}.$$

On trouve donc,

$$F_3 = \frac{1/4}{X - 1} + \frac{(-1/4)X - 1/4}{X^2 + 1} + \frac{(-1/2)X + 1/2}{(X^2 + 1)^2} - \frac{1}{(X^2 + 1)^3},$$

qui est nécessairement la décomposition en éléments simples de F_3 par unicité de cette décomposition. *N.B. Pour ceux que l'on avait déjà calculés, on retrouve bien les mêmes coefficients.*