

Feuille 5. Groupe symétrique

Exercice 1. Pour $n = 3$, puis $n = 4$:

1. Ecrire toutes les permutations de \mathcal{S}_n .
2. Ecrire pour chacune la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer la signature.

Exercice 2. On considère les deux éléments suivants de \mathcal{S}_{10} :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 3 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces deux permutations ($s = \sigma$ puis τ):

1. Ecrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer sa signature.
2. Calculer la composée $(1, 2) \circ s$ et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que $\varepsilon((1, 2) \circ s) = -\varepsilon(s)$.
3. Calculer la composée $s \circ (1, 2)$ et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que $\varepsilon(s \circ (1, 2)) = -\varepsilon(s)$.

Exercice 3.

1. Soient σ_1 et σ_2 deux cycles à supports disjoints de longueurs l_1 et l_2 . Donner alors l'ordre de $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$.
2. Soit τ l'élément de \mathcal{S}_{11} : $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Décomposer τ en un produit de cycles à supports disjoints. Préciser l'ordre et la signature de τ . Calculer τ^2 , τ^3 , τ^{1000} et τ^{-1} en produits de cycles à supports disjoints.

Exercice 4. Soit $n \geq 3$ dans \mathbb{N} et γ un cycle de longueur r dans \mathcal{S}_n tel que $\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r)$.

1. Etant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, démontrer que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est le r -cycle $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r))$.
2. Montrer alors que pour tout couple $1 \leq i < j \leq n$, on a $(j-2, j-1) \dots (i+1, i+2)(i, i+1)(i, j)(i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1) = (j-1, j)$.
En déduire que $\{(i, i+1), 1 \leq i \leq n-1\}$ engendre \mathcal{S}_n .
3. On pose $\gamma_1 = (1, 2, \dots, n)$ et $\tau = (1, 2)$, calculer $\gamma_1^p \circ \tau \circ \gamma_1^{-p}$. En déduire que les permutations τ et γ_1 engendrent \mathcal{S}_n .

Exercice 5. Si c est un cycle de \mathcal{S}_n d'ordre l et $k \leq l$ un entier naturel, calculer l'ordre de c^k .

Exercice 6.

1. Soit $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_5, \sigma(1) = 1\}$. Vérifier que H est un sous-groupe de \mathcal{S}_5 et trouver son ordre.
2. Soit $K = \{\sigma \in \mathcal{S}_5, \sigma(1) = 1 \text{ ou } \sigma(1) = 2\}$. Montrer que K n'est pas un sous-groupe de \mathcal{S}_5 .
3. r et n étant des entiers tels que $3 \leq r \leq n$, on pose

$$F = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \sigma(i) \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Prouver que F est un sous-groupe de \mathcal{S}_n et déterminer son ordre.