L2 MTH1314 2014-2015

Feuille 6. Déterminants

Exercice 1. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$ par la formule $\sum_{s\in S_n} \varepsilon(s) A_{s(1),1} \cdots A_{s(n),n}$, puis par développement par rapport à une ligne ou colonne, enfin à l'aide d'opérations élémentaires.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $b = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer $\det_b(e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det_b(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$.

Exercice 3. On dit qu'une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Montrer que si n est impair et A est antisymétrique alors son déterminant est nul. Le résultat est-il encore vrai si n est pair ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left((-1)^{i+j} a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que $\det(B) = \det(A)$.

Exercice 6. On dit qu'une matrice A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si les trois conditions suivantes sont remplies.

1. La matrice A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
2. La matrice A est inversible.
3. Son inverse est aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ soit une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A)$ vaut 1 ou -1.

Exercice 7. On rappelle que le déterminant d'une matrice réelle A de taille $n \times n$ est défini par

$$\det A = \sum_{s\in S_n} \varepsilon(s) A_{s(1),1} \cdots A_{s(n),n}.$$

On appelle matrice de permutation une matrice carrée M telle que: $M_{ij} \in \{0, 1\}$, il y a un et un seul 1 par ligne, et un et un seul 1 par colonne. Autrement dit il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $M_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Montrer qu'alors on a $\det M = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 8. Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, une matrice antisymétrique (c'est-à-dire ${}^tA = -A$) et $J \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \det(A + xJ) = \det(A).$$

Exercice 9. Vrai ou Faux
Soient v_1, v_2, v_3, v_4 4 vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

1. Si $v_2 = -v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$.
2. Si $v_3 = -2v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -2$.

3. $\det(v_1, v_3, v_4, v_2) = -\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

4. $\det(v_1, 2v_2, 3v_4, 4v_4) = 24\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

5. $\det(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = 2\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

6. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

7. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

8. $\det(3v_1 + v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

9. $\det(2v_1 + v_3, v_2, v_3, 2v_4 - v_2) = 4\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Exercice 10. **Vrai ou Faux**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un n-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

1. Si on remplace l'un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres le déterminant est inchangé.

2. Si on soustrait au premier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est inchangé.

3. Si on soustrait le premier vecteur à chacun des autres, le déterminant est inchangé.

4. Si on multiplie chacun des vecteurs par 2, le déterminant est multiplié par 2^n.

5. Si on ajoute au dernier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est multiplié par 2.

6. Si on échange deux des vecteurs, le déterminant est changé en son opposé.

Exercice 11. **Vrai ou Faux**
Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$, $n \geq 2$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi?

1. $\det(A) = \det({}^tA)$.

2. $\det(2A) = 2\det(A)$.

3. $\det(-A) = (-1)^n\det(A)$.

4. $\det(A +^t A) = 2\det(A)$.

5. Si A est diagonale, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

6. Si A est triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

7. Si A est diagonale par blocs, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

8. Si l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.

9. Si on ajoute à la première ligne de A une combinaison linéaire des autres, le déterminant est inchangé.

10. Si on soustrait de la dernière ligne de A la somme de toutes les lignes, le déterminant est inchangé.