

## Solution de l'exercice 2

$$f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy.$$

1. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{grad}f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 2y - 2x \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{grad}f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2y \\ 2y = 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Donc tous les points de la droite  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$  sont des points critiques.

3. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{H}f_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $(x, y)$  un point critique, id est  $x = y$ , la matrice hessienne étant constante vaut toujours en ces points  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ . Donc avec les notations de Monge,

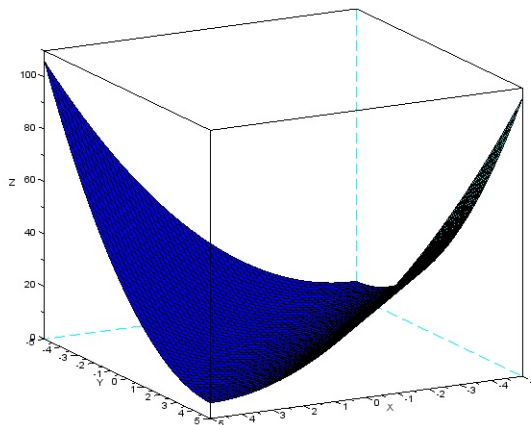
$$rt - s^2 = 0.$$

Conclusion : on ne peut rien conclure.

5. Mais on se rend compte que toute cette armada est inutile dès le départ on aurait pu s'apercevoir que,

$$f_3(x, y) = (x - y)^2 + 6 \geq 6 = f_3(x, x).$$

Et donc tous les points critiques  $x = y$  sont des minimums globaux.



$$f_4(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - (x + y)^4.$$

1. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{grad}f_4(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 4(x + y)^3 \\ 8y - 4(x + y)^3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \text{grad}f_4(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (x + y)^3 \\ 2y = (x + y)^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(x + y)^3}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{(x+x)^3}{2} = 4x^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou} \\ \begin{cases} x = y \\ 1 = 4x^2 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ \text{ou} \\ x = y = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a trois points critiques,  $(0, 0)$ ,  $(1/2, 1/2)$  et  $(-1/2, -1/2)$ .

3. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\text{H}f_4(x, y) = \begin{pmatrix} 8 - 12(x + y)^2 & -12(x + y)^2 \\ -12(x + y)^2 & 8 - 12(x + y)^2 \end{pmatrix}.$$

4. Si  $(x, y) = (0, 0)$ ,

$$\text{H}f_4(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = 64 > 0 \quad \text{et} \quad r > 0.$$

Donc  $(0, 0)$  est un minimum local.

Si  $(x, y) = (1/2, 1/2)$  ou  $(x, y) = (-1/2, -1/2)$

$$\text{H}f_4(1/2, 1/2) = \text{H}f_4(-1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = 16 - 144 < 0.$$

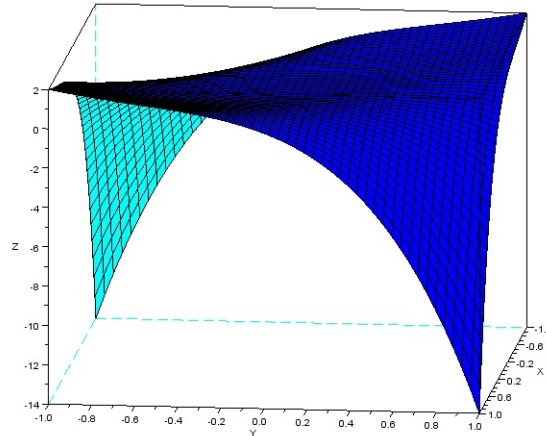
Donc  $(1/2, 1/2)$  et  $(-1/2, -1/2)$  ne sont pas des extremums. Plus précisément ce sont des points selles.

5. Puisque  $(1/2, 1/2)$  et  $(-1/2, -1/2)$  ne sont pas des extremums locaux ils sont encore moins globaux. Le point  $(0, 0)$  n'est pas un minimum global car on remarque que

$$f_4(x, 0) = x^2 - x^4,$$

qui tend vers  $-\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Ou même on a,

$$f_4(2, 0) = 4 - 16 < 0 = f_4(0, 0).$$



$$f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2).$$

Notez tout d'abord que cette fonction n'est pas définie partout. Plus précisément son ensemble de définition est

$$D = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}.$$

1. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $D$ ,

$$\text{grad} f_5(x, y) = \begin{pmatrix} (\ln(x))^2 + y^2 + 2 \ln(x) \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $(x, y) \in \mathbb{D}$ , puisque  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{grad} f_5(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln(x) + 2) \ln(x) + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(x) = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (1, 0) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (e^{-2}, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a deux points critiques,  $(1, 0)$  et  $(e^{-2}, 0)$ .

3. Pour tout  $x$  et  $y$  dans  $D$ ,

$$\text{H}f_5(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2 \ln(x) + 2}{x} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

4. Si  $(x, y) = (1, 0)$ ,

$$Hf_5(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = 4 > 0 \quad \text{et} \quad r > 0.$$

Donc  $(1, 0)$  est un minimum local.

Si  $(x, y) = (e^{-2}, 0)$

$$Hf_5(e^{-2}, 0) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

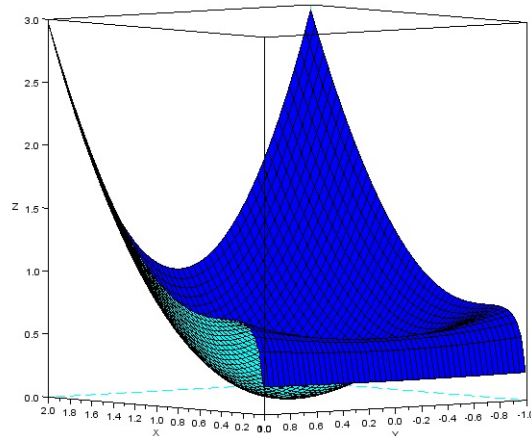
Donc avec les notations de Monge,

$$rt - s^2 = -4 < 0.$$

Donc  $(e^{-2}, 0)$  est un point selle.

5. Le point  $(1, 0)$  est bien un minimum global car, puisque  $x$  est toujours positif, on a

$$f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2) \geq 0 = f_5(1, 0).$$



### Solution de l'exercice 3

1. Il s'agit juste de d'appliquer les formules du cours. Pour cela on calcule les dérivées partielles,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y - x.$$

Ainsi en  $(1, 1, f(1, 1))$ ,

$$z = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = -1 + x - 1 - 3(y - 1) = x - 3y + 1.$$

En  $(1, 2, f(1, 2))$

$$z = -5 - 5(y - 2) = 5 - 5y.$$

En  $(2, 1, f(2, 1))$

$$z = 1 + 3(x - 2) - 4(y - 1) = 3x - 4y - 1.$$

2. L'équation de la tangente en  $(1, 1)$  est,

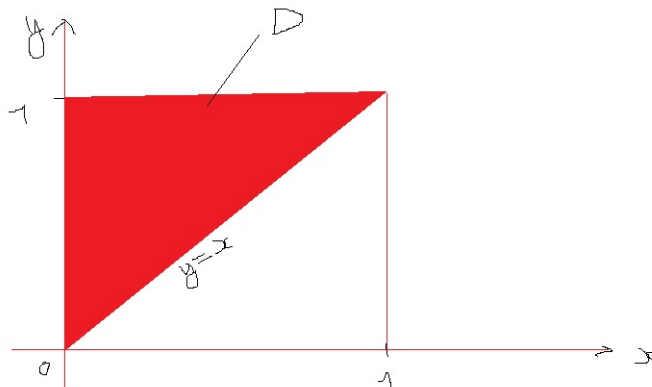
$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1) = x - 1 - 3(y - 1) = x - 3y + 2.$$

Ou encore,

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

## Solution de l'exercice 4

1. Voici un chef d'oeuvre représentant  $D$ , (Picasso en verdisserait de jalousie)



Puisque les bornes en  $x$  dépendent de  $y$ , on intègre d'abord par rapport à  $x$ ,

$$\begin{aligned} \iint_D f_1(x, y) dx dy &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y x^2 + y dx dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left[ \frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{y^3}{3} + y^2 dy \\ &= \left[ \frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

2. Bon ici pour  $D$  je me contente de dire que c'est le carré dont les sommets sont  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(0, 1)$ . Il est plus facile de d'abord intégrer par rapport à  $y$ ,

$$\begin{aligned} \iint_D f_2(x, y) dx dy &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 x \sin(xy) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 [-\cos(xy)]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_{x=0}^1 1 - \cos(x) dx \\ &= [x - \sin(x)]_{x=0}^1 = 1 - \sin(1). \end{aligned}$$

Par rapport à  $x$  en premier est théoriquement faisable mais à quelques coups d'intégration par parties... que l'on va préférer éviter.