Séries de Fourier

- L'espace $L^2([0,T])$
  - La fonction est réelle
    - La fonction est impaire, les $a_n(f)$ sont nuls
    - La fonction est paire, les $b_n(f)$ sont nuls
    - Les coefficients $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$ et $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$ sont réels
  - Espace de Hilbert
    - Inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle f,g\rangle| \leqslant ||f||\,||g||$
    - Produit scalaire, $\langle f,g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g}(t)dt$
    - Norme L^2, $||f|| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt}$
  - $c_n(f) = \frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$, $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$
    - $\frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{2} + \frac{|b_n(f)|^2}{2}$
    - $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$
  - Définition des coefficients de Fourier, $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}dt$
  - Existence de la série de Fourier dans L^2, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{in\omega t}$
  - Formule de Parseval, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||_{L^2}^2$
  - Calculs de limites de séries numériques, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux
  - Si de plus la fonction est continue
    - Par le théorème de Féjèr, la série de Fourier converge normalement vers la fonction
  - Par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge simplement vers la régularisée
  - Estimation ponctuelle, $f(0) = ...$, $\tilde{f}(T/2) = ...$ etc