MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Mars 2015

Correction du devoir Maison n°1
Calcul différentiel et séries de fonctions

Solution de l'exercice 1. L'espace vectoriel de départ E étant de dimension finie et la fonction f étant linéaire, on sait que alors que f est continue (il n'y a pas d'histoire de complétude ici). On montre à la main que f est différentiable. Il n'y a aucune difficulté mais attention à la rédaction !
Pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$, on a, par la linéarité de f,

$$f(x+h) - f(x) = f(h) = f(h) + 0\,\|h\|\,.$$

N'écrivez pas $D_x f(h) = f(h)$ *est une application linéaire (continue) donc* f *différentiable.* Il est incorrect de parler de $D_x f$ avant même d'avoir montré que f était bien différentiable. On dit que d'une part l'application $h \mapsto f(h)$ est une application linéaire, d'autre part l'application $\epsilon : h \mapsto 0$ tend clairement vers 0 quand $\|h\| \to 0$. On en conclut que f est différentiable sur E et même sa différentielle vaut, pour tout $x \in E$ et tout $h \in E$,

$$D_x f(h) = f(h).$$

De plus **l'application différentielle**,

$$\begin{aligned} Df : \quad & E \to \mathscr{L}(E,F) \\ & x \mapsto f, \end{aligned}$$

est constante ! Elle est donc continue et f est $\mathscr{C}^1$. On continue puisque Df est constante, l'application différentielle première est différentiable à son tour et sa différentielle est nulle. Pour tout $x \in E$ et $h \in E$,

$$D_{x+h} f - D_x f = f - f = 0 = 0 + \|h\|\,0.$$

D'une part, $h \mapsto 0$ est linéaire, d'autre part $h \mapsto 0$ tend vers 0 quand $\|h\| \to 0$. Donc $D_. f$ est différentiable et sa différentielle est nulle. Ainsi $D^2_x f = \tilde{0}$ et ce pour tout $x \in E$. Puis par récurrence, on vérifie que pour tout $k \geqslant 2$,

$$D^k f = \tilde{0}.$$

Solution de l'exercice 2.

1. Là encore on montre à la main que u est différentiable. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

   $$u(x+h) = \|x-a+h\|_2^2 = \|x-a\|_2^2 + 2\langle x-a, h\rangle + \|h\|_2^2 = u(x) + L_x.h + \|h\|_2\,\epsilon(h),$$

   avec $Lx(h) = 2\langle x-a, h\rangle$ qui est linéaire par propriété du produit scalaire, $\epsilon(h) = \|h\|_2$ qui tend vers 0 quand $\|h\|_2 \to 0$. Attention, c'est $\epsilon(h)$ tout seul qui doit tendre vers 0 et non $\|h\|\,\epsilon(h)$. On en déduit donc que l'application u est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et
   $$D_x u(h) = 2\langle x-a, h\rangle.$$

2. La méthode *à la main* est bien trop brutale ici. Il faut construire f pas à pas. Posons

   $$\begin{aligned} i : \quad & \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Bien entendu, l'on sait que i est différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou dérivable puisque i est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $h \in \mathbb{R}$,

$$D_x i(h) = hi'(x) = -\frac{h}{x^2}.$$

Maintenant on en déduit que $i \circ u$ est différentiable sur l'ensemble des vecteurs x tel que $u(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on sait que

$$D_x(i \circ u)(h) = D_{u(x)} i \left(D_x u(h)\right) = -\frac{D_x u(h)}{u^2(x)} = \frac{-2\langle x-a, h\rangle}{\|x-a\|_2^4}.$$

On termine avec

$$\begin{aligned} v: \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto a - x, \end{aligned}$$

qui est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ puisque affine et de différentielle

$$D_x v(h) = -h.$$

Pour ceux qui n'en sont pas sûrs, détailler la preuve, qui se fait à la main : $v(x+h)-v(x) = \dots$ A l'aide de tous ces outils, on dit que f vaut $f = v \times (i \circ u)$. Ici ce n'est pas une composition entre $i \circ u$ et v mais bien un produit d'une forme $i \circ u$ (qui atterrit donc dans les scalaires $\mathbb{R}$) et une fonction vectorielle v qui atterrit dans $\mathbb{R}^n$. On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_x f(h) = D_x v(h) \times i \circ u(x) + v(x) \times D_x(i \circ u)(h).$$

Ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} D_x f(h) &= -\frac{h}{\|x-a\|_2^2} + (a-x)\frac{-2\langle x-a, h\rangle}{\|x-a\|_2^4} = \frac{2\langle x-a, h\rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^4} - \frac{h}{\|x-a\|_2^2} \\ &= \frac{2\langle x-a, h\rangle(x-a) - h\,\|x-a\|_2^2}{\|x-a\|_2^4}. \end{aligned}$$

3. Avec un joli dessein à l'appui, on sait que le projeté d'un vecteur sur une droite de vecteur directeur $x-a$ est

$$p(h) = \frac{\langle x-a, h\rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^2}.$$

De plus le projeté sur l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(x-a)$ vaut

$$q(h) = h - p(h).$$

Dont on déduit que le symétrique par rapport à l'axe $x-a$ (toujours avec un joli dessein) est

$$S(h) = p(h)-q(h) = 2p(h)-h = 2\frac{\langle x-a, h\rangle(x-a)}{\|x-a\|_2^2} - h = \frac{2\langle x-a, h\rangle(x-a) - h\,\|x-a\|_2^2}{\|x-a\|_2^2}.$$

Et à l'étonnement général, on trouve que

$$Df(x).h = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}.$$

Solution de l'exercice 3.

1. Soient x et y deux réels entre a et b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} \|f(x)-f(y)\| &= \|f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(y)\| \\ &\leqslant \|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(x)-f_n(y)\|+\|f_n(y)-f(y)\| . \end{aligned}$$
Or f_n est k-lipschitzienne donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant k\,|x-y|+\|f(x)-f_n(x)\|+\|f_n(y)-f(y)\| .$$
La constante k étant indépendante de n, lorque $n \to +\infty$, on obtient grace à la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f,
$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant k\,|x-y| .$$
Ce qui montre bien que f est lipschitzienne. A tous ceux à qui j'ai demandé si $\lim \|.\| = \|\lim .\|$ la réponse est oui puisque la norme est toujours une application continue : $|\|x_n\|-\|x\|| \leqslant \|x_n - x\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f. Alors la négation nous donne (attention il faut savoir nier une affirmation même un peu longue)
$$\exists \epsilon>0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N, \text{ tel que } \qquad \sup_{x\in[a,b]} \|f_n(x)-f(x)\| > \epsilon. \tag{1}$$
Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n=\varphi(N) \geqslant N$ et $x_{\varphi(N)} \in [a,b]$ tel que,
$$\left|f_{\varphi(N)}\left(x_{\varphi(N)}\right)-f\left(x_{\varphi(N)}\right)\right| > \epsilon. \tag{2}$$
En fait il est possible de construire φ strictement croissante, car le maximum entre $N+1$ et $\varphi(N)$ est un entier donc par (1) il existe $\varphi(N+1) \geqslant \max(N+1,\varphi(N))$ tel que $\left|f_{\varphi(N+1)}\left(x_{\varphi(N+1)}\right)-f\left(x_{\varphi(N+1)}\right)\right| > \epsilon$. On a ainsi construit une sous-suite $\left(x_{\varphi(N)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ sur laquelle les $f_{\varphi(N)}$ restent loin de f. Or la suite de fonctions converge simplement c'est-à-dire lorsque l'argument x ne bouge pas, $f_n(x)-f(x)$ tend vers 0. Le but du jeu est donc de *stabiliser* la suite $\left(x_{\varphi(N)}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ autour d'un x fixe. Par exemple si la suite convergeait une limite x ce serait plutôt chouette... Mais rappelons que cette suite réelle se trouve dans un intervalle borné. Vous y êtes ? On invoque le théorème de Bolzano-Weierstrass naturellement ! Il existe une autre extractrice $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que la nouvelle suite $\left(x_{\psi(\varphi(N))}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $x \in [a,b]$. Voyons ce que l'on obtient pour ce x. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} \left|f_{\psi(\varphi(N))}(x)-f(x)\right| \geqslant\ & \left|f_{\psi(\varphi(N))}(x_{\psi(\varphi(N))})-f(x_{\psi(\varphi(N))})\right| \\ & -\left|f_{\psi(\varphi(N))}(x)-f_{\psi(\varphi(N))}(x_{\psi(\varphi(N))})\right| \\ & -\left|f(x_{\psi(\varphi(N))})-f(x)\right| . \end{aligned}$$
Pour la première ligne on utilise (2). Pour les deux autres lignes on utilise que ces fonctions sont k-lipschitziennes (d'après la question 1 pour la fonction f),
$$\left|f_{\psi(\varphi(N))}(x)-f(x)\right| \geqslant \epsilon - 2k\left|x-x_{\psi(\varphi(N))}\right| .$$
Maintenant par la convergence simple $\left|f_{\psi(\varphi(N))}(x)-f(x)\right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par définition de x et comme k est indépendant de N, $2k\left|(x)-x_{\psi(\varphi(N))}\right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par passage à la limite quand $N \to +\infty$,
$$0 > \epsilon.$$
Ce qui est absurde. Donc l'hypothèse de non-convergence uniforme est mise fausse et finalement la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.