MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Mai 2015

Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On définit $\check{f}(t) = f(-t)$ et $\tau_{t_0} f(t) = f(t - t_0)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer alors les coefficients de Fourier $c_n\left(\check{f}\right)$, $c_n\left(f'\right)$ et $c_n\left(\tau_{t_0} f\right)$ en fonction de ceux de f.
2. Déduire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de $|\cos(t)|$.

Solution de l'exercice 1. • $c_n\left(\check{f}\right)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n\left(\check{f}\right) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \check{f}(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(-t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

La formule magique est changement de variable, $s = -t$

$$\begin{aligned} c_n\left(\check{f}\right) &= \frac{1}{T}\int_{s=0}^{-T} f(s)\,\mathrm{e}^{in\omega s}\,(-\,\mathrm{d}s) \\ &= \frac{1}{T}\int_{s=-T}^{0} f(s)\,\mathrm{e}^{in\omega s}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T}\int_{t=-T}^{0} f(s)\,\mathrm{e}^{-i(-n)\omega s}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(s)\,\mathrm{e}^{-i(-n)\omega s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{car } f(s)\,\mathrm{e}^{-i(-n)\omega s} \text{ est } T\text{-périodique.} \end{aligned}$$

D'où le résultat,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n\left(\check{f}\right) = c_{-n}\left(f\right).$$

• $c_n\left(f'\right)$: La formule magique est l'intégration par parties mais en **dérivant** l'exponentielle complexe naturellement,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n\left(f'\right) &= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f'(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\left[f(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\right] - \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,(-in\omega)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(T)\,\mathrm{e}^{-in\frac{2\pi}{T}T} - f(0)}{T} + in\omega\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)\,(-in\omega)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(T) - f(0)}{T} + in\omega c_n\left(f\right). \end{aligned}$$

Comme la fonction f est T-périodique, le premier terme est nul, on conclut donc, et directement pour tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ (même $n = 0$)

$$c_n\left(f'\right) = in\omega c_n\left(f\right).$$

• $c_n\left(\tau_{t_0} f\right)$: La formule magique est le changement de variable. Comme vu en cours mais je le refais puisque la définition de $\tau_{t_0} f$ est $t \mapsto f(t - t_0)$ et non $t \mapsto f(t + t_0)$ (ce qui ne change pas grand chose).

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n\left(\tau_{t_0} f\right) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \tau_{t_0} f(t)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t - t_0)\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $s = t - t_0$,

$$\begin{aligned}
c_n\left(\tau_{t_0} f\right) &= \frac{1}{T}\int_{s=-t_0}^{T-t_0} f(s)\,\mathrm{e}^{-in\omega s - in\omega t_0}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{T}\int_{s=0}^{T} f(s)\,\mathrm{e}^{-in\omega s - in\omega t_0}\,\mathrm{d}s \qquad \text{car } f(s)\,\mathrm{e}^{-in\omega s - in\omega t_0} \text{ est } T\text{-périodique} \\
&= \mathrm{e}^{-in\omega t_0}\,\frac{1}{T}\int_{s=0}^{T} f(s)\,\mathrm{e}^{-in\omega s}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n\left(\tau_{t_0} f\right) = \mathrm{e}^{-in\omega t_0}\, c_n(f).$$

Pour la question 2, il faut se servir de la série de Fourier de $|\sin(t)|$ et voir que $|\cos(t)| = \left|\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \tau_{\pi/2}\,|\sin|\,(t)$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 2\pi]$ dont la dérivée f' est dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer alors que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

et discuter du cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2. Avec la bonne formule des coefficients de Fourier de la dérivée, par la formule de Parseval (puisque f' est $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$),

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\left(f'\right)\right|^2.$$

D'après l'exercice précédent,

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in\omega|^2\,|c_n(f)|^2$$

Ici $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2\,|c_n(f)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2\,|c_n(f)|^2
\end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $n^2 \geqslant 1$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 \qquad (1) \\
&= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \qquad \text{car, par hypothèse, } c_0(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \\
&= \int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

L'inégalité isopérimétrique.
Maintenant on suppose que l'on peut paramétriser le bord $\partial\Omega$ d'un domaine du plan Ω par une fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(0) = f(2\pi)$ (la fonction f peut être étendue en une fonction 2π-périodique) puisque le domaine est fermé (on fait le tour du bord quand t varie entre 0 et 2π et en $t = 2\pi$ on est revenu à notre point de

départ). On suppose $f \in \mathscr{C}^1$, c'est dire que le bord du domaine est assez lisse. A partir de là on peut supposer, quitte à reparamétriser, f telle que $|f'| = \frac{L}{2\pi}$ où L est la longueur totale du bord, $L = \int_{t=0}^{2\pi} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Par une merveilleuse formule, formule de Green-Riemann, qui nous dit qu'intégrer une fonction sur tout le domaine Ω peut revenir à intégrer la fonction (un peu modifiée) uniquement sur le bord $\partial\Omega$, on obtient l'égalité suivante que l'on parachute ici,

$$-2i\mathscr{A} = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\bar{f}'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathscr{A}$ est l'aire du domaine Ω. Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\mathscr{A} &= \left|\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\bar{f}'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{t=0}^{2\pi} \left|f(t)\bar{f}'(t)\right|\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\mathscr{A} \leqslant \sqrt{\int_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \int_{t=0}^{2\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Par ce qui précède, on obtient,

$$2\mathscr{A} \leqslant \int_{t=0}^{2\pi} \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}t = \frac{L^2}{2\pi}$$

Finalement,

$$4\pi\mathscr{A} \leqslant L^2.$$

Cas d'égalité.
Si $\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x$, cela implique nécessairement que l'inégalité (1) est une égalité. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n^2 c_n(f) = c_n(f).$$

En effet par l'absurde s'il existe un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 c_{n_0}(f) > c_{n_0}(f)$ alors puisque l'on a toujours $\forall n \neq n_0, \qquad n^2 c_n(f) \geqslant c_n(f)$ qui implique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{n_0\}} n^2 c_n(f) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{n_0\}} c_n(f).$$

En ajoutant l'inégalité stricte pour n_0 on obtient alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(f) > \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f).$$

ce qui contredit le fait que (1) soit une égalité. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n^2 c_n(f) = c_n(f).$$

Et on conclut que

$$\forall n \notin \{-1, 1\}, \qquad c_n(f) = 0.$$

Ainsi seuls les coefficients $c_1(f)$ et $c_{-1}(f)$ sont non nuls. Puisque la série de Fourier est finie par l'exercice 10, la fonction f est égale à sa série de Fourier et donc,

$$f(t) = c_1(f)\,\mathrm{e}^{it} + c_{-1}(f)\,\mathrm{e}^{-it}.$$

Et dans l'inégalité isopérimétrique ?
Le cas d'égalité implique l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc $|f|$ est colinéaire (ou proportionnel) à $|f'|$. Or par hypothèse, $|f'|$ est constante égale à $\frac{L}{2\pi}$. Donc la fonction f traçant le bord de Ω est de module constant... Nécessairement c'est un cercle !