MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Janvier 2015

Feuille de TD n°1
Calcul différentiel

Exercice 1. Montrer que l'application f est différentiable et calculer sa différentielle dans les cas suivants.

1. L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est constante, pour y_0 fixé dans $\mathbb{R}^p$, $f(x) = y_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. L'application f est linéaire, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Exercice 2.

1. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$, calculer $Df(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, telle qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|f(x)\| \leqslant M \|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et calculer $Df(0)$.

Exercice 3.

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application et a un point de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on définit la dérivée dans la direction u au point a par,
$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$
Montrer que lorsque f est différentiable en a cette limite existe et l'exprimer en fonction de $Df(a)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. On définit
$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^p, \\ x & \mapsto & f(x, -x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^p \\ (x, y) & \mapsto & f(y, x). \end{array}$$
Montrer que u et v sont différentiables et calculer leurs différentielles en fonction de la différentielle de f, puis de son gradient et enfin de ses dérivées partielles.
3. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par, $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Justifier que f est différentiable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D_u f(1, 0) = u$.
4. On considère,
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{array}$$
   (a) Montrer à l'aide de l'inégalité $2xy \leqslant x^2 + y^2$, que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est dérivable dans toutes les directions au point $(0, 0)$.
   (c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
   (d) Montrer que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0, 0)$.
5. Mêmes questions pour
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x y^2}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{array}$$

Exercice 4. Calculer la jacobienne des applications suivantes,

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y,z) = (\sin(xyz),\, x+\mathrm{e}^z,\, y+z)\,, & f_2(x,y,z) = (x\mathrm{ch}(y),\, \mathrm{e}^y\cos(z))\,, \\ f_3(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy}\,(\cos(z)+\sin(y))\,, & f_4(x,y) = \big(x,\, y\,\mathrm{e}^x,\, xy^2\big)\,, \\ f_5(x) = \big(\mathrm{e}^x,\, x^3,\, \cos(x)\big)\,. & \end{array}$$

Exercice 5. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Étudier la différentiabilité des deux fonctions suivantes

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P^3(t) - P^2(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & P' - P^2. \end{array}$$

Exercice 6. Etudier en fonction de $\alpha > 0$ la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E symétrique, id est, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle$.

1. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle u(x),\, x\rangle$, est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Etablir que l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$, est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 8. Pour $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$, on considère,

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ g'(x) & \text{si} \quad x \neq y \end{cases} \end{array}$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 9. On considère

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad y = 0 \\ y^2\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais pas $\mathscr{C}^1$.

Exercice 10. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \frac{a-x}{\|x-a\|^2}. \end{array}$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, calculer sa différentielle et montrer que

$$Df(x).h = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}$$

où S est la symétrie orthogonale d'axe $x - a$.