

Feuille de TD n°2
Calcul différentiel

Théorème des accroissements finis

Exercice 1. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Justifier que f est \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition et calculer Df . En déduire les valeurs de f .

Exercice 2. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

Exercice 3. On considère

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad g = f \circ f$$
$$(x, y) \mapsto (x^2 - y, x^2 + y^2)$$

1. Justifier que f et g sont \mathcal{C}^1 et calculer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $J_f(x, y)$ la jacobienne de f et $J_g(x, y)$ la jacobienne de g .
2. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B((0, 0), \rho)}$ (la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon ρ), on a $\|Dg(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B((0, 0), \rho)}$.

Exercice 4. Soit f une application de $]a, b[$ dans \mathbb{R}^n avec $a < b$ deux réels. On suppose que f est continue et dérivable sur $]a, b[$ et que $f'(x)$ admet une limite noté l_1 quand x tend vers a (par valeurs supérieures). Montrer alors que f se prolonge en une fonction continue sur $[a, b[$ et dérivable à droite en a .

Indication : pour la continuité on rappelle que \mathbb{R}^n est un espace complet et pour la dérivation considérer la fonction $g(x) = f(x) - l_1x$.

Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 6. Soient E_1, E_2 et F trois espaces vectoriels normés de dimensions finies.

1. Montrer que toute application linéaire $f : E_1 \rightarrow F$ est \mathcal{C}^∞ et calculer ses différentielles $D^k f$.
2. Montrer que toute application bilinéaire $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ est \mathcal{C}^∞ et calculer ses différentielles $D^k B$.

Exercice 7. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^2 . Pour $h \in E$, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_h : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto Df(x).h \end{aligned}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in E$, $D\varphi_h(x).k = D^2f(x).(h, k)$.
2. Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = t^2f(x)$. Montrer alors que pour tout $x \in E$, $D^2f(0)(x, x) = 2f(x)$.
3. Soient $x, h, k \in E$ et soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow F \\ (t, s) &\mapsto f(x + th + sk). \end{aligned}$$

Calculer $\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t}(0, 0)$.

Exercice 8. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 au voisinage du cercle unité, $x^2 + y^2 = 1$. Pour tout nombre réel θ on pose $F(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta)$. Calculer $F''(0)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0)$.

Exercice 9.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Indication : poser $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $Df(x)$ est un automorphisme orthogonale, c'est-à-dire que $Df(x)$ est linéaire, bijective et conserve le produit scalaire : pour tout $x, h, k \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x).h, Df(x).k \rangle = \langle h, k \rangle.$$

1. Déterminer la différentielle de $g : x \mapsto \langle Df(x).h, Df(x).k \rangle$.
2. En déduire que $A(h, k, l) = \langle Df(x).h, D^2f(x).(k, l) \rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières.
3. Montrer alors que pour tout $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, $A(h, k, l) = 0$.
4. Conclure que f est une application affine dont l'application linéaire associée est un automorphisme orthogonal.