

**Feuille de TD n°3**  
**Calcul différentiel**

**Formule de Taylor**

**Exercice 1.** Écrire le développement de Taylor à l'ordre de 2 au voisinage de  $(0, 0)$  de la fonction  $f$  définie par  $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$ . En déduire la limite quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  de  $\frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ .

**Exercice 2.** Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0 mais que  $f$  n'est pas deux fois dérivable en 0.

**Exercice 3.** En utilisant la formule de Taylor jusqu'aux termes du deuxième ordre, trouver une valeur approchée de  $(0.95)^{2.01}$  et majorer l'erreur.

**Extrema**

**Exercice 4.** Déterminer les extremums et dire s'ils sont locaux ou globaux des applications suivantes.

1.  $f_1(x, y) = x^2 - y^2$ .
2.  $f_2(x, y) = x^3 - y^3$ .
3.  $f_3(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .
4.  $f_4(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$ .

**Exercice 5.** Déterminer suivant les valeurs du paramètre  $\lambda$ , la nature des extremums de la fonction

$$f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

**Exercice 6.** Étudier les extrema de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + 2x - z.$$

**Exercice 7.** Déterminer les extrema de la fonction  $f(x, y) = xy$  sur le cercle unité  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ .

**Exercice 8.** Déterminer les extrema de la fonction  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$  sur le domaine  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**Exercice 9.** Déterminer le volume maximal d'un parallélépipède rectangle dont la surface fait  $2m^2$ .