

Feuille de TD n°6
Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique et intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Exercice 2. Déterminer la périodicité et la parité des fonctions suivantes. Dessiner leurs graphes et calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f(t) = |t|$ sur $[-1, 1]$, prolongée en une fonction 2 -périodique.
2. $f(t) = |\sin(t)|$ sur \mathbb{R} .
3. $f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{sur } [0, \pi[, \\ (2\pi - t)(t - \pi) & \text{sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π -périodique.
4. $f(t) = \frac{t}{T}$ sur $[0, T]$, prolongée en une fonction T -périodique, $T > 0$.
5. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, \pi[, \\ -1 & \text{sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π -périodique.
6. $f(t) = e^{i\pi z t}$ sur $[0, 2]$, prolongée en une fonction 2 -périodique, où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique, \mathcal{C}^1 par morceaux. On définit $\check{f}(t) = f(-t)$ et $\tau_{t_0}f(t) = f(t - t_0)$ sur \mathbb{R} .

1. Calculer alors les coefficients de Fourier $c_n(\check{f})$, $c_n(f')$ et $c_n(\tau_{t_0})$ en fonction de ceux de f .
2. Dédire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de $|\cos(t)|$.

Exercice 4. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t) = \sin^3(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. A l'aide de l'exercice 2, montrer les égalités suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

Exercice 6. Soit $f \in L^2([0, T])$ et $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier associés. Montrer que si f est T -périodique alors f est aussi dans $L^2([0, 2T])$ et exprimer ses coefficients $c'_n(f)$ associés à la période $2T$, en fonction des $c_n(f)$. En déduire que les développements en série de Fourier sont identiques.

Exercice 7. Développer en série de Fourier la fonction définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = \frac{\sin(x)}{5-3\cos(x)}$.

Exercice 8. Développer en série de Fourier la fonction définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)}$, avec $a > 0$. En déduire $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)} dx$.

Exercice 9. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 2\pi]$ dont la dérivée f' est dans $L^2([0, 2\pi])$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$. Montrer alors que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} f'^2(x) dx,$$

et discuter du cas d'égalité.

Exercice 10. Soit f une fonction T -périodique dans $L^1([0, T])$ dont la série de Fourier converge uniformément. Notons g sa limite.

1. Montrer que g est T -périodique, continue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(g) = c_n(f)$.
2. En déduire que f est égale à sa série de Fourier.
3. Que dire du cas où la série de Fourier converge absolument, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$?

Exercice 11. Déterminer les fonctions 2π périodiques et \mathcal{C}^∞ vérifiant la propriété suivante,

$$\exists a > 0, \exists M > 0 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M a^n.$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue et 2π -périodique telle que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$

Montrer que f est π -périodique.

Convergence ponctuelle

Exercice 13. Pour chaque fonction de l'exercice 2, donner le type de convergence de la série de Fourier associée puis montrer les égalités suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. A l'aide de son développement en série de Fourier, montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

Exercice 15. Soit f une fonction 2π -périodique, continue et \mathcal{C}^1 par morceaux. Montrer que

$$c_n(f^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(f).$$

Montrer que le résultat reste vrai si l'on suppose uniquement $f \in L^2([0, 2\pi])$.