L2 MTH1314 2015-2016

Correction du Rattrapage du Devoir Maison n° 1

Solution de l'exercice 1

Question 1

Vous êtes à peu près tous passés à côté de cette première question. Je sais que vous aviez une remarque dans le cours comme quoi « les propriétés algébriques se transportent par un morphisme » mais c'est justement le sens de la question de remontrer proprement cette affirmation. Il fallait montrer que $(G, *)$ est un groupe et que ce groupe est commutatif. L'énoncé s'efforce de parler d'ensembles dans la première phrase et nul part il est admis que $(G, *)$ est un groupe. Il fallait donc le démontrer.

1. L'énoncé suppose que $*$ est une loi de composition interne.
2. Montrons que $*$ est associative. Soient $(g, h, k) \in G^3$. On observe que

$$\begin{aligned}
\varphi\left((g * h) * k\right) = \varphi(g * h).\varphi(k) &= \left(\varphi(g).\varphi(h)\right).\varphi(k) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme,}\\
&= \varphi(g).\left(\varphi(h).\varphi(k)\right) && \text{car . est associative,}\\
&= \varphi\left(g * (h * k)\right) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme.}
\end{aligned}$$

   Or φ est injective, donc,

$$(g * h) * k = g * (h * k).$$

   Ceci étant vrai pour tout $(g, h, k) \in G^3$, on en déduit que $*$ est associative.
3. Montrons que la loi $*$ est commutative dans G. Soient $(g, h) \in G^2$, à nouveau

$$\begin{aligned}
\varphi\left(g * h\right) &= \varphi(g).\varphi(h) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme,}\\
&= \varphi(h).\varphi(g) && \text{car . est commutative,}\\
&= \varphi\left(h * g\right) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme.}
\end{aligned}$$

   La fonction φ étant injective,

$$\forall (g, h) \in G^2, \qquad g * h = h * g,$$

   et on a bien montré que $*$ est commutative.
4. Montrons l'existence d'un élément neutre. Notons e_H l'élément neutre de H (existe car par hypothèse $(H, .)$ est un groupe). Puisque φ est surjective, il existe $e_G \in G$ tel que $\varphi(e_G) = e_H$, ou encore puisque φ est bijective, l'élément $e_G := \varphi^{-1}(e_H)$ existe bien dans G. De plus, pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi\left(g * e_G\right) &= \varphi\left(g\right).\varphi\left(e_G\right) && \text{car } \varphi \text{ est un morphisme,}\\
&= \varphi\left(g\right).e_H && \text{par définition de } e_G,\\
&= \varphi\left(g\right) && \text{car } e_H \text{ est l'élément neutre de } H.
\end{aligned}$$

   Puis comme φ est injective,

$$\forall g \in G, \qquad g * e_G = g.$$

   La loi $*$ étant commutative, on a également $\forall g \in G$, $e_G * g = g$ et e_G est bien l'élément neutre de G.

5. Montrons que chaque élément admet un inverse. Soit $g \in G$. Puisque $\varphi(g) \in H$ et que H est un groupe, on sait qu'il existe $h_1 \in H$ tel que

$$\varphi(g).h_1 = h_1.\varphi(g) = e_H,$$

(soit $h_1 = (\varphi(g))^{-1}$). Or la fonction φ est surjective, donc il existe $g_1 \in G$ tel que $\varphi(g_1) = h_1$. Puis, une dernière fois,

$$\varphi(g * g_1) = \varphi(g).\varphi(g_1) = \varphi(g).h_1 = e_H = \varphi(e_G) \qquad \text{car d'après le point le précédent on a } \varphi(e_G) = e_H.$$

Vous l'aurez compris, la fonction φ est injective, donc $g*g_1 = e_G$. La loi $*$ étant commutative, $g_1 * g = e_G$ et g admet bien un inverse dans $(G,*)$. Ceci étant vrai pour tout $g \in G$, on conclut que tous les éléments sont inversibles.

Finalement $(G,*)$ est un groupe commutatif.

Question 1

Il était possible bien entendu de montrer à la main que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe mais pour ce corrigé, je vais suivre la politique de cet exercice. Considérons la fonction

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3. \end{array}$$

(cf l'exercice 5 du TD 3). On sait tous naturellement que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note également que que c'est un morphisme de $(\mathbb{R},*)$ dans $(\mathbb{R},+)$: pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x*y) = \varphi\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right) = x^3 + y^3 = \varphi(x) + \varphi(y).$$

Or $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif. Donc par la question précédente, on conclut directement que $(\mathbb{R},*)$ est un groupe commutatif.

Solution de l'exercice 2

L'énoncé de cet exercice était sinon faux, au moins trop imprécis, je m'en excuse et j'en ai naturellement pris en compte dans la notation. Voici un meilleur énoncé :

Exercice 2

On définit $\mathbb{Q}[i] := \{a + ib,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-corps de $(\mathbb{C},+,\times)$, id est, $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$ et de plus si $x \in \mathbb{Q}[i]^*$, alors $x^{-1} = 1/x$ (qui existe bien puisque $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps) appartient à $\mathbb{Q}[i]^*$ (« $\mathbb{Q}[i]^*$ est stable par inverse »).
2. Justifier que l'application

$$\mathrm{N}: \begin{array}{rcl} (\mathbb{Q}[i]^*,\times) & \to & (\mathbb{Q}_+^*,\times) \\ a+ib & \mapsto & a^2+b^2, \end{array}$$

est un morphisme de groupes et en déduire que

$$H := \{a+ib,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{Q}^2, a^2+b^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}[i],\times)$.

Question 1

On montre sans difficulté que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

1. Il est clair que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.
2. On note que $0 = 0 + i0$ avec $(0,0) \in \mathbb{Q}^2$ et $1 = 1 + i0$ avec $(1,0) \in \mathbb{Q}^2$. Ainsi l'élément neutre pour $+$, $0 \in \mathbb{Q}[i]$ et l'élément neutre pour $\times$, $1 \in \mathbb{Q}[i]$.
3. Soient $(x,y) = (a+ib, a'+ib') \in \mathbb{Q}[i]^2$, alors $x+y = (a+a') + i(b+b')$. Or $(a+a', b+b') \in \mathbb{Q}^2$ donc $x + y \in \mathbb{Q}[i]$.
4. Soit $x = a + ib \in \mathbb{Q}[i]$. Puisque $(-a, -b) \in \mathbb{Q}$, on a $-x \in \mathbb{Q}[i]$. Et on sait déjà que $(\mathbb{Q}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
5. Soit $(x,y) = (a+ib, a'+ib') \in \mathbb{Q}[i]^2$, alors $xy = aa' - bb' + i(a'b + ab')$. Or $(aa' - bb', a'b + ab') \in \mathbb{Q}^2$ donc $xy \in \mathbb{Q}[i]$.

Ceci montre que $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
De plus soit $x = a + ib \in \mathbb{Q}[i]^*$. Sous la loi $\times$, l'inverse dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est

$$x^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Puisque $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in \mathbb{Q}^2$ on en déduit que $x^{-1} \in \mathbb{Q}[i]$. Puis comme $x \neq 0$ alors $x^{-1} \neq 0$. Donc $x^{-1} \in \mathbb{Q}[i]^*$. Ceci montre que $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et que $(\mathbb{Q}[i], +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Question 2

Avant tout on remarque que N est bien définie, si $x \in \mathbb{Q}[i]^*$, alors $N(x)$ est bien un rationnel strictement positif. On note également que pour tout $x \in \mathbb{Q}[i]^*$, $N(x) = |x|^2$. Donc pour tout $(x,y) \in (\mathbb{Q}[i]^*)^2$,

$$N(xy) = |xy|^2 = |x|^2 \times |y|^2 .$$

Ainsi N est un morphisme entre $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$. Ces deux ensembles munis de la loi $\times$ sont cette fois bien des groupes car par la question 1, $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et je vous laisse vérifier en exercice que $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ est aussi un groupe. Pour terminer on constate que H est le noyau de N,

$$H = \operatorname{Ker} N.$$

Donc d'après le cours, on sait que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$.