L2 MTH1314 2015-2016

Devoir Maison n˚2
A rendre pour le 19 Novembre

Exercice 1. On définit le centre d'un groupe G par

$$Z(G) = \{a \in G,\ \forall g \in G\ ag = ga\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $Z(G) \cap H$ est un sous-groupe de $Z(H)$.
3. Soient G et G' deux groupes et φ un morphisme $G \to G'$. On suppose φ surjectif. Montrer alors que $\varphi(Z(G))$ est un sous-groupe de $Z(G')$.

Exercice 2. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ dont les restes des divisions euclidiennes par 3, 5 et 7 sont respectivement 1, 4 et 5.

Exercice 3. Soient p et q deux nombres premiers distincts, $n = pq$ et t un entier tel que $t \equiv 1\ [\varphi(n)]$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que $x^t \equiv x\ [p]$ et $x^t \equiv x\ [q]$. En déduire que $x^t \equiv x\ [n]$
2. On considère u un entier premier avec $\varphi(n)$ et v son inverse dans $\mathbb{Z}/\varphi(n)\mathbb{Z}$. Montrer que les fonctions ψ_u et ψ_v de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définies par $\forall x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\psi_u(x) = x^u$ et $\psi_v(x) = x^v$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.