

Solution de l'exercice 1

Dans $\mathbb{C}[X]$, la décomposition de $F = \frac{X}{(X-1)^2(X+1)^2(X-i)(X+i)}$ est :

$$\exists a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}, \quad F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{X-i} + \frac{f}{X+i}.$$

La fraction F est impaire $F(-X) = -F(X)$ dont on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{-e}{X+i} + \frac{-f}{X-i} \\ = \frac{-a}{X-1} + \frac{-b}{(X-1)^2} + \frac{-c}{X+1} + \frac{-d}{(X+1)^2} + \frac{-e}{X-i} + \frac{-f}{X+i}. \end{aligned}$$

Donc par unicité de la décomposition en éléments simples,

$$\begin{cases} a = c \\ b = -d \\ e = f. \end{cases} \quad (1)$$

De plus,

$$b = (X-1)^2 F \Big|_{X=1} = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)} \Big|_{X=1} = \frac{1}{2^2 \times 2} = \frac{1}{8}.$$

Donc par (1),

$$d = \frac{-1}{8}.$$

De la même façon,

$$e = (X-i)F \Big|_{X=i} = \frac{X}{(X^2-1)^2(X+i)} \Big|_{X=i} = \frac{i}{(-1-1)^2 \times 2i} = \frac{1}{8}.$$

Et donc, par (1),

$$f = \frac{1}{8}.$$

En prenant la limite de $xF(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient

$$0 = a + 0 + c + 0 + e + f.$$

Par (1),

$$0 = 2a + 2e.$$

Et puisque $e = 1/8$,

$$a = \frac{-1}{8}.$$

Et par (1),

$$c = \frac{-1}{8}.$$

Finalement, en rassemblant toutes les valeurs trouvées pour a, b, c, d, e, f ,

$$F = \frac{-1/8}{X-1} + \frac{1/8}{(X-1)^2} + \frac{-1/8}{X+1} + \frac{-1/8}{(X+1)^2} + \frac{1/8}{X-i} + \frac{1/8}{X+i}.$$

Solution de l'exercice 2

Question 1

Sans difficulté, la formule du cours est

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}.$$

Puisque pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{\sigma(i),i} \in \mathbb{Z}$ (car par définition la matrice est à coefficient dans \mathbb{Z}) on en déduit que le produit $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \in \mathbb{Z}$. De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, la signature $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$, dont on déduit que $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \in \mathbb{Z}$ et on conclut que $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

Question 2

La matrice A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donc par la question 1, $\det(A) \in \mathbb{Z}$. De plus la matrice A est inversible. Donc par définition, il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = I_n$. Puisque le déterminant du produit est le produit des déterminants,

$$\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Et on redémontre la formule bien connue :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Or si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, par définition $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Ainsi par la question 1, on sait également que $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Finalement $\det(A)$ est un élément de \mathbb{Z} dont l'inverse (pour la multiplication) est aussi dans \mathbb{Z} . Nécessairement :

$$\det(A) \in \{-1, 1\}.$$