

**Devoir Maison n°3**  
**A rendre pour le 10 Décembre**

**Exercice 1.** Décomposer dans  $\mathbb{C}[X]$ , la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{X}{(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)}.$$

**Exercice 2.** On note par  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les tous les coefficients sont entiers.

1. Montrer par une formule du cours que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  alors  $\det(A) \in \mathbb{Z}$ .
2. On dit qu'une matrice  $A$  est dans  $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$  si les trois conditions suivantes sont remplies.
  - (a) La matrice  $A$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .
  - (b) La matrice  $A$  est inversible.
  - (c) Son inverse est aussi un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

Montrer que si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , alors  $\det(A)$  vaut 1 ou  $-1$ .