L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 5. Les fractions rationnelles

Exercice 1. Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6}, \qquad F_2 = \frac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2},$$

$$F_3 = \frac{X^5+5X^3+2X+1}{X^3-1}, \qquad F_4 = \frac{X^6-3X^5-6X^3+5X^2-2X+2}{X^4-2X^3+2X^2-2X+1}.$$

Exercice 2. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que

$$\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G),$$

et que

$$\deg(F+G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G)),$$

avec égalité si $\deg(F) \neq \deg(G)$.

Exercice 3. Comparer les pôles et les zéros de $G = F(X+a)$ à ceux de F.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{4}{(X^2-1)^2}, \quad F_2 = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}, \quad F_3 = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2},$$

$$F_4 = \frac{1}{X^5-1}, \quad F_5 = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2}, \quad F_6 = \frac{X^5+1}{(X^3-1)(X^2+X+1)}.$$

Indication : pour F_4 utiliser une formule du cours faisant intervenir une dérivée.

Exercice 5. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{X^5+1}{X^3-1}, \quad F_2 = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}, \quad F_3 = \frac{X^3+1}{(X-1)(X^2+1)^3},$$

$$F_4 = \frac{X^4+3X^2+1}{X^5+X}, \quad F_5 = \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3}, \quad F_6 = \frac{1}{X^{2n}-1}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Indications : pour F_3 diviser X^3+1 par X^2+1, pour F_4 on a $1+3X^2+X^4 = 1+X^4+X(\dots)$.

Exercice 6.

1. Calculer la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles f suivantes, puis calculer les dérivées d'ordre n de f :
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ (on distinguera le cas $a = b$ et le cas $a \neq b$).
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos a + 1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\cosh a + 1}$
2. Calculer les dérivées d'ordre n de la fonction $f(x) = \arctan x$.

Exercice 7. On considère la fraction

$$F = \frac{X+3}{(X-1)^4(X+1)}.$$

1. Donner l'expression de G définie par $G(T) = F(T+1)$.
2. Montrer que l'on peut décomposer le numérateur $D(T)$ de la fraction $G(T)$ de la façon suivante
$$D(T) = a(2+T) + TD_1(T)$$
où a est un réel et $D_1(T)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[T]$. En déduire alors que
$$G(T) = \frac{2}{T^4} - \frac{2}{T^3(T+2)}.$$
3. Réitérer le processus pour obtenir la décomposition en éléments simples de $G(T)$ et en déduire celle de $F(X)$.

Exercice 8. A l'aide de l'idée présentée dans l'exercice 7, décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{X^2+1}{X^6\left(X^2+X+1\right)}, \qquad F_2 = \frac{X^2+X+1}{(X-1)^5\left(X^2-X+1\right)}.$$

Exercice 9. On considère la fraction :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$$

1. Montrer que la fraction s'écrit :
$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X^2+X+1)^3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{(X-1)^k} + F_1(X),$$
où la fraction F_1 ne possède pas 1 pour pôle.
2. Multiplier cette égalité par $(X-1)^3$, dériver une fois, deux fois et en déduire la valeur des a_k.
3. Remarquer que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$ et terminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 10. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^3-1}.$$

En déduire la décomposition en éléments simples de

$$\frac{X+2}{(X-1)\left(X^2+X+1\right)},$$

puis celle de

$$\frac{1}{\left(X^3-1\right)^2}.$$