L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 6. Le groupe symétrique

Exercice 1. Pour $n = 3$, puis $n = 4$:

1. Ecrire toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$.
2. Ecrire pour chacune la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer la signature.

Exercice 2. On considère les deux éléments suivants de $\mathcal{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 3 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces deux permutations ($s = \sigma$ puis τ) :

1. Ecrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer sa signature.
2. Calculer la composée $(1, 2) \circ s$ et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que $\varepsilon((1, 2) \circ s) = -\varepsilon(s)$.
3. Calculer la composée $s \circ (1, 2)$ et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que $\varepsilon(s \circ (1, 2)) = -\varepsilon(s)$.

Exercice 3. On définit l'ordre d'une permutation σ comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$.

1. Soit σ un cycle de longueur l. Quel est son ordre ?
2. Si $\sigma^k = \mathrm{id}$, que peut-on en déduire ?
3. Soient σ_1 et σ_2 deux cycles à supports disjoints de longueurs l_1 et l_2. On suppose dans cette question que $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Donner alors l'ordre de σ.
4. Soit τ l'élément de $\mathcal{S}_{11}$: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Décomposer τ en un produit de cycles à supports disjoints. Préciser l'ordre et la signature de τ. Calculer τ^2, τ^3, τ^{1000} et τ^{-1} en produits de cycles à supports disjoints.
5. Si σ est un cycle de longueur l et si $k \leqslant l$ montrer que σ^k est d'ordre $\frac{l}{l \wedge k}$.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 3$ dans $\mathbb{N}$ et γ un cycle de longueur r dans $\mathcal{S}_n$ tel que $\gamma = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$.

1. Etant donné $\sigma \in \mathcal{S}_n$, démontrer que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est le r-cycle $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_r))$.
2. Montrer alors que pour tout couple $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a

   $$(j-2, j-1) \ldots (i+1, i+2)(i, i+1)(i, j)(i, i+1)(i+1, i+2) \ldots (j-2, j-1) = (j-1, j).$$

   En déduire que $\{(i, i+1),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ engendre $\mathcal{S}_n$.
3. On pose $\gamma_1 = (1, 2, \ldots, n)$ et $\tau = (1, 2)$, calculer $\gamma_1^p \circ \tau \circ \gamma_1^{-p}$. En déduire que les permutations τ et γ_1 engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 5.

1. Soit $H = \{\sigma \in S_5, \sigma(1) = 1\}$. Vérifier que H est un sous-groupe de S_5 et trouver son cardinal.
2. Soit $K = \{\sigma \in S_5, \sigma(1) = 1 \text{ ou } \sigma(1) = 2\}$. Montrer que K n'est pas un sous-groupe de S_5.
3. r et n étant des entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant n$, on pose

   $$F = \{\sigma \in S_n, \forall i \in \{1, \ldots, r\}, \sigma(i) \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

   Prouver que F est un sous-groupe de S_n et déterminer son cardinal.