L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 7. Le déterminant

Exercice 1. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -5 & -7 & -4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix}$ par la formule $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1} \cdots A_{\sigma(n),n}$, puis par développement par rapport à une ligne ou colonne, enfin à l'aide d'opérations élémentaires.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base $b = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Calculer $\det_b(e_2 + e_3, e_3 + e_1, e_1 + e_2)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det_b(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$.

Exercice 3. On dit qu'une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Montrer que si n est impair et A est antisymétrique alors son déterminant est nul. Le résultat est-il encore vrai si n est pair ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left((-1)^{i+j} a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que $\det(B) = \det(A)$.

Exercice 6. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non-coplanaires de $\mathbb{R}^3$. On note par $\mathscr{P} = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$ le parallélépipède défini par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On cherche à exprimer son volume noté $\mathscr{V}$ en fonction du déterminant. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique, avec son produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$: si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

1. Pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, on construit $\vec{e_u} = \lambda_1 \vec{u}$. Trouver λ_1 pour que $\vec{e_u}$ soit de norme 1 : $\|e_u\| = 1$, et de même sens que $\vec{u}$.
2. Pour $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$, non nuls, on construit $\vec{e_v} = \lambda_3 (\vec{v} - \lambda_2 \vec{e_u})$. Trouver λ_2 pour que $\vec{e_v}$ soit orthogonal à $\vec{e_u}$: $\langle \vec{e_v}, \vec{e_u} \rangle = 0$ puis trouver λ_3 pour que $\vec{e_v}$ soit de norme 1.
3. Pour $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{R}^3$, non nuls, on construit $\vec{e_w} = \lambda_6 (\vec{w} - \lambda_5 \vec{e_v} - \lambda_4 \vec{e_u})$. Trouver λ_4 pour que $\vec{e_w}$ soit orthogonal à $\vec{e_v}$, puis λ_5 pour que $\vec{e_w}$ soit orthogonal à $\vec{e_v}$ et enfin trouver λ_6 pour que $\vec{e_w}$ soit de norme 1.
4. On note $\mathscr{B} = (\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w})$. Que dire de cette base ?
5. Donner les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cette base en fonction de leurs produits scalaires avec $\vec{e_u}$,$\vec{e_v}$ et $\vec{e_w}$.
6. Calculer $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et montrer que cela correspond bien au volume $\mathscr{V}$.
7. Soit $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée, orientée dans le même sens que $\mathscr{B}$, dans le sens où l'on suppose que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \geqslant 0$. Ecrire les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de leurs produits scalaires. En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
8. Montrer alors que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = 1$.
9. En déduire que $\mathscr{V} = \det_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 7. **Vrai ou Faux**
Soient v_1, v_2, v_3, v_4 4 vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^4$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si $v_2 = -v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0$.
2. Si $v_3 = -2v_4$ alors $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) = -2$.
3. $\det(v_1, v_3, v_4, v_2) = -\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
4. $\det(v_1, 2v_2, 3v_4, 4v_4) = 24\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
5. $\det(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = 2\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
6. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
7. $\det(v_1 + 3v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
8. $\det(3v_1 + v_3, v_2, v_3, v_4 - v_2) = \det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
9. $\det(2v_1 + v_3, v_2, v_3, 2v_4 - v_2) = 4\det(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Exercice 8. **Vrai ou Faux**
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère un n-uplet de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si on remplace l'un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres le déterminant est inchangé.
2. Si on soustrait au premier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est inchangé.
3. Si on soustrait le premier vecteur à chacun des autres, le déterminant est inchangé.
4. Si on multiplie chacun des vecteurs par 2, le déterminant est multiplié par 2^n.
5. Si on ajoute au dernier vecteur la somme de tous les vecteurs, le déterminant est multiplié par 2.
6. Si on échange deux des vecteurs, le déterminant est changé en son opposé.

Exercice 9. **Vrai ou Faux**
Soit A une matrice réelle de taille $n \times n$, $n \geqslant 2$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $\det(A) = \det({}^tA)$.
2. $\det(2A) = 2\det(A)$.
3. $\det(-A) = (-1)^n\det(A)$.
4. $\det(A +{}^t A) = 2\det(A)$.
5. Si A est diagonale, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
6. Si A est triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
7. Si A est diagonale par blocs, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.
8. Si l'une des lignes de A est combinaison linéaire des autres, alors $\det(A) = 0$.
9. Si on ajoute à la première ligne de A une combinaison linéaire des autres, le déterminant est inchangé.
10. Si on soustrait de la dernière ligne de A la somme de toutes les lignes, le déterminant est inchangé.