L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 8. Les fonctions de deux variables.

Exercice 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.
2. $f_2(x,y) = \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$.
3. $f_3(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 2. Pour chacune des applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes,

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \qquad f_2(x,y) = x^3 + y^3 - x^2y^2, \qquad f_3(x,y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy,$$
$$f_4(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^4, \qquad f_5(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2),$$

1. Calculer le gradient de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne de f.
4. Pour chacun des points critiques de f, donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
5. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f.

Exercice 3. Etant donnés le domaine D de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f, dessiner D et calculer l'intégrale double de f sur D dans les cas suivants.

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, 0 < y < 1\}$, $f_1(x,y) = x^2 + y$.
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $f_2(x,y) = x\sin(xy)$.
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x\}$, $f_3(x,y) = x^2\sin(xy)$.
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$, $f_4(x,y) = x(1-2x)\sin(xy)$.
5. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, où $a, b > 0$, $f_5(x,y) = x^3 + y^3$.
6. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$, $f_6(x,y) = \ln(1 + x + y)$.

Exercice 4. Soit l'applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par,

$$f_1(x,y) = x^2 - y^2 - xy.$$

1. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ aux points $(1,1,f(1,1))$, $(1,2,f(1,2))$, $(2,1,f(2,1))$.
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par $(1,1)$, si elle existe.