

Feuille 8. Les fonctions de deux variables.

Exercice 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

1. $f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.
2. $f_2(x, y) = \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$, $f(x, 0) = 0$.
3. $f_3(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

Exercice 2. Pour chacune des applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes,

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy, \quad f_2(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 y^2, \quad f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy,$$

$$f_4(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - (x + y)^4, \quad f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2),$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice hessienne de f .
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
5. Pour chacun des points critiques de f , dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f .

Exercice 3. Etant donné le domaine D de \mathbb{R}^2 et la fonction f , dessiner D et calculer l'intégrale double de f sur D dans les cas suivants.

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, 0 < y < 1\}$, $f_1(x, y) = x^2 + y$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $f_2(x, y) = x \sin(xy)$.
3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x\}$, $f_3(x, y) = x^2 \sin(xy)$.
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$, $f_4(x, y) = x(1 - 2x) \sin(xy)$.
5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, où $a, b > 0$, $f_5(x, y) = x^3 + y^3$.
6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, $f_6(x, y) = \ln(1 + x + y)$.

Exercice 4. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$f_1(x, y) = x^2 - y^2 - xy.$$

1. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ aux points $(1, 1, f(1, 1))$, $(1, 2, f(1, 2))$, $(2, 1, f(2, 1))$.
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par $(1, 1)$, si elle existe.