L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Correction de l'exercice 6 du TD n°2

Soit

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, xy = 1\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{array}$$

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer Df. En déduire les valeurs de f.

La fonction f est composée de fonctions $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur leurs ensembles de définition. Le seul problème vient du dénominateur de $\frac{x+y}{1-xy}$, qui s'annule si et seulement si $1 = xy$. Ainsi la fonction f est bien définie et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$.
Commençons par calculer les dérivées partielles de f. Pour tout point $(x,y) \in \mathscr{D}$,

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} + 0 - \frac{h_y'(x)}{1+h_y(x)^2},$$

où

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \qquad h_y(x) := \frac{x+y}{1-xy}.$$

Dans la définition de la fonction h_y, le réel y est le paramètre et x la variable. On a

$$h_y'(x) = \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}.$$

On en déduit donc,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2(1+y^2)+y^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque la fonction f est « symétrique » par rapport à ses coordonnées, $f(x,y) = f(y,x)$, on en déduit que $\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$. Ainsi on en déduit immédiatement que pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$ et tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$d_{(x,y)} f(h,k) = \partial_1 f(x,y)h + \partial_2 f(x,y)k = 0.$$

Pour en déduire les valeurs de f on utilise l'inégalité des accroissements finis. Fixons $a = (x_a, y_a) \in \mathscr{D}$ et $b = (x_b, y_b) \in \mathscr{D}$, on note, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) = (1-t)a + tb = ((1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b)$. Alors,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left\| d_{\gamma(t)} f \right\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \|b-a\| = 0.$$

On en déduit ainsi directement que $f(b) = f(a)$ et ce pour tout point de $\mathscr{D}$ et donc la fonction est constante. **Mais cette formule contient une faute ! ! !** Il faut que le domaine d'application soit connexe. Ce qui n'est pas du tout le cas de $\mathscr{D}$ (faire un dessin). On découpe donc $\mathscr{D}$ de la façon suivante

$$\mathscr{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}$$
$$\mathscr{D}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy < 1\right\}$$
$$\mathscr{D}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 1,\ x < 0,\ y < 0\right\}.$$

De cette façon, on obtient bien (puisque chaque $\mathscr{D}_i$ est connexe) que la fonction f est constante sur $\mathscr{D}_i$. Puis, comme on a

$$f(x,x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$
$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = -\pi,$$

on en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_1, \qquad f(x,y) = \pi$$
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_2, \qquad f(x,y) = 0$$
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_3, \qquad f(x,y) = -\pi.$$