L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Correction de la question 1 de l'exercice 4 du TD n°2

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

Justifier que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.

On pose

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \end{array}$$

alors $g = f \circ h$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$. De plus par la formule de composée de fonctions différentiables, on a

$$\forall (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad d_{(r,\theta)}g(k_1,k_2) = d_{h(r,\theta)}f\left(d_{(r,\theta)}h(k_1,k_2)\right). \tag{1}$$

Calculons la différentielle de h. Puisque

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

On en déduit à l'aide de la formule donnant la différentielle en fonction des dérivées partielles que,

$$d_{(r,\theta)}h(k_1,k_2) = \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) \times k_1 + \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) \times k_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta)k_1 - r\sin(\theta)k_2 \\ \sin(\theta)k_1 + r\cos(\theta)k_2 \end{pmatrix}.$$

En réinjectant cette formule dans (1),

$$\forall (k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad d_{(r,\theta)}g(k_1,k_2) = d_{(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}f\left(\cos(\theta)k_1 - r\sin(\theta)k_2,\, \sin(\theta)k_1 + r\cos(\theta)k_2\right).$$

D'autre part, puisque l'on a également (formule de la différentielle en fonction des dérivées partielles), $d_{(x,y)}f(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times v$, on en déduit avec $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $u = \cos(\theta)k_1 - r\sin(\theta)k_2$ et $v = \sin(\theta)k_1 + r\cos(\theta)k_2$ que pour tout $(k_1,k_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} d_{(r,\theta)}g(k_1,k_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times (\cos(\theta)k_1 - r\sin(\theta)k_2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \times (\sin(\theta)k_1 + r\cos(\theta)k_2) \\ &= \left(\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)k_1 \\ &\quad + \left(-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)k_2. \end{aligned}$$

Puis comme $\frac{\partial g}{\partial r}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = d_{(r,\theta)}g(1,0)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = d_{(r,\theta)}g(0,1)$, en conclut que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{aligned}$$