L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD n°1
Calcul différentiel

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^5$. Montrer que f est différentiable et calculer $d_x f$.
2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 1$, définie par $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = A^3$. Montrer que f est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
3. Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$, telle qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|_F \leqslant M \|x\|_E^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et calculer $d_0 f$.

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Étudier la différentiabilité des deux fonctions suivantes

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P^3(t) - P^2(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & P' - P^2. \end{array}$$

Exercice 3. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application et a un point de E.

1. Montrer que lorsque f est différentiable, alors f admet des dérivées dans toutes les directions et pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, exprimer cette dérivée $D_u f(a)$ en fonction de la différentielle.
2. Exprimer, lorsque f est différentiable, la différentielle de f en a en fonction de la dérivée dans la direction $(1, 0)$ et de la dérivée dans la direction $(0, 1)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ & & 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{array}$$

1. Démontrer que f est continue en $(0, 0)$.
2. Démontrer que f admet toutes des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$.
3. Montrer cependant que f n'est pas différentiable.

Exercice 5. On considère,

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^3 y}{x^4+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ & & 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{array}$$

1. Démontrer l'inégalité suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2|xy| \leqslant x^2 + y^2$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées directionnelles de f en $(0, 0)$ existent et les calculer.
4. Montrer cependant que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f:\mathbb{R}^2 \to E$ une application différentiable. On définit

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & E, \\ x & \mapsto & f(x,-x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & f(y,x). \end{array}$$

1. Montrer que u et v sont différentiables et calculer leurs différentielles en fonction de la différentielle de f.
2. Calculer les dérivées partielles de u et v en fonction de celle de f.

Exercice 7.

1. Soit E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|.\|_2$. Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E$, $N(x) = \|x\|_2^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle. En déduire que $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\|.\|_2$ est différentiable en x et calculer sa différentielle.
2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|.\|$ une norme quelconque de E. Montrer que $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E symétrique, id est, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle$.

1. Montrer que l'application
$$f: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x),\, x\rangle \,, \end{array}$$
est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Soient α et $\beta : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur E. Montrer que
$$\Pi: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha(x) \times \beta(x), \end{array}$$
est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celle de α et de β.
3. Déduire des questions précédentes que
$$\varphi: \begin{array}{rcl} E \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \end{array}$$
est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
4. Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 9. Soient E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|.\|$, $a \in E$ et

$$f: \begin{array}{rcl} E \setminus \{a\} & \to & E \\ x & \mapsto & \frac{a-x}{\|x-a\|^2}. \end{array}$$

Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{a\}$, calculer sa différentielle et montrer que

$$Df(x).h = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}$$

où S est la symétrie orthogonale d'axe $x-a$.