

Feuille de TD n°3
Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convergeant simplement vers f . Que dire de f si toutes les fonctions f_n sont paires? croissantes? strictement croissantes?

Exercice 2. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , E un \mathbb{R} -espace vectoriel et soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans E . On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) converge uniformément vers f (respectivement g) sur I .

1. Montrer que $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f + g$.
2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Trouver des conditions suffisantes pour que la suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f g$.

Exercice 3. On considère $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ (1 - n^2)x + 2n - n^{-1} & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 1/n & \text{si } x \in [2/n, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer, sans trop de calcul, que $(f_n \circ f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$.
3. On considère une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convergeant uniformément vers une fonction g . On suppose que pour tout n la fonction g_n est continue sur \mathbb{R} . Montrer alors que la suite $(g_n \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $g \circ g$.
4. On considère à présent la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ définie par pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(h_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction h que l'on déterminera.
2. Montrer que la suite $(h_n \circ h_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} vers $h \circ h$.

Exercice 4. Déterminer la nature de la suite de terme général,

$$I_n = \int_0^1 \frac{n e^{-x} + x^2}{n + x} dx.$$

Exercice 5. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$u_n(x) = n |\ln(x)|^n.$$

1. Étudier le domaine D de convergence simple de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi que la fonction limite u .
2. A-t-on convergence uniforme sur le domaine D ? Sur les compacts de D ?

Exercice 6. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = e^{-nx^n}.$$

1. Étudier le domaine D de convergence simple de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi que la fonction limite u .
2. Justifier sans calcul le fait que $(u_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers u sur D tout entier. Démontrer que la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers u sur $[0, 1[$.
4. Soit $0 \leq a < b < 1$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$.
5. On pose pour tout $n \geq 0$, $v_n = u'_n$. Déterminer la domaine de convergence simple de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.
6. Étudier la convergence uniforme de $(v_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, +\infty[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$u_n(x) = \frac{n \sin(nx)}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \leq \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |u_n(x)| \leq n$$

et en déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement mais non uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Justifier que l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1 + u^2} du,$$

est convergente.

3. Montrer que $0 < I < \arctan(x)$.

Indication : on pourra montrer que la suite $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{1+u^2} du$ est alternée.

4. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x) dx.$$

Montrer que $(J_n)_{n \geq 1}$ est convergente, quelle est sa limite ?

Exercice 8. Pour $a < b$ deux réels et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$ dans E , convergeant simplement vers une fonction f . On suppose que les fonctions f_n sont toutes lipschitziennes pour une même constante k ,

$$\exists k > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad \|f_n(x) - f_n(y)\| \leq k |x - y|.$$

1. Montrer que la fonction f est k -lipschitzienne.
2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

Indication : procéder par l'absurde.

Séries de fonctions

Exercice 9. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2 + 1}.$$

Exercice 10. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{n + x}.$$

Exercice 11. Montrer que la série de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ mais ne converge pas normalement ni même absolument sur $[0, 1]$.

Exercice 12.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{-kx^k}.$$

2. Montrer que la fonction

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx^n}$$

est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 13. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ définie sur \mathbb{R}_+ par

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n} \quad \text{si } x > 0.$$

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[0, 1]$ et en déduire que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2. Calculer la somme de cette dernière série sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$ converge et que

$$\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)}{x^2-1} dx$ est convergente.
2. On pose, pour tout $N \geq 1$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} -x^{2n} \ln(x).$$

Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_N(x) dx = 0.$$

3. En déduire que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en déduire la valeur de I .

Exercice 15. On considère une série de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général est donné sur \mathbb{R} par, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note S la fonction somme.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
3. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} S(1/p) = +\infty$ et par un argument de monotonie, en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} xS(x)$.

Indication : faire une comparaison série-intégrale.