

Feuille de TD n°5  
Espaces de Hilbert et Séries de Fourier dans  $L^2$

Espaces de Hilbert

**Exercice 1.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. A l'aide du théorème de projection sur un sous-espace fermé, montrer que si  $x, y \in E$  vérifient  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$  alors  $x$  et  $y$  sont colinéaires. Connaissez-vous une autre démonstration valide dans un espace préhilbertien ?

**Exercice 2.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $F$  et  $F'$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que si  $F'$  est orthogonal et supplémentaire à  $F$ ,  $E = F \oplus F'$ , alors  $F' = F^\perp$ .

**Exercice 3.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $A$  une partie de  $E$ . Montrer que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .

**Exercice 4.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  tel que  $F \neq E$ . Montrer que qu'il existe un vecteur orthogonal à  $F$  :  $F^\perp \neq \{0\}$ .

**Exercice 5.** Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose  $G$  fermé.

1. Montrer que  $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$ .
2. Montrer que  $G^{\perp\perp} \subset G$ .
3. Montrer que  $\overline{F}^\perp = F^\perp$ .
4. En déduire des questions précédentes que  $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ .

**Exercice 6.** Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $f$  admet un adjoint s'il existe un endomorphisme  $g \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.$$

1. Montrer que si un adjoint  $g$  existe alors il est unique.
2. On suppose  $E$  complet et  $f$  continue. On note  $\|\cdot\|_*$  sa norme subordonnée :

$$\|f\|_* = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

- (a) Montrer à l'aide du théorème de Riesz que  $f$  admet un adjoint  $g$ .
- (b) Montrer que  $g$  est continu et que  $\|g\|_* = \|f\|_*$ .

**Exercice 7.** Soit  $l^2(\mathbb{N})$  l'ensemble des suites complexes de carré sommable :

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que pour tout  $(x, y) = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \overline{y_k} < +\infty.$$

- Vérifier que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $l^2(\mathbb{N})$ . On notera  $\|\cdot\|_2$  la norme associée.
- Soit  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy de  $l^2(\mathbb{N})$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que  $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente. On notera  $x_k$  sa limite.
- Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $q \geq n_0$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^N |x_k - x_k^{(q)}|^2 \leq \varepsilon.$$

- En déduire que  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est un élément de  $l^2(\mathbb{N})$  et que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\|x - x^{(n)}\|_2 \leq \varepsilon$ .
- Conclure que  $(l^2(\mathbb{N}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace de Hilbert.

**Exercice 8.** On considère l'ensemble des fonctions continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R} : E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$  munit du produit scalaire :  $\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ . On définit la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$  par, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt & \text{si } t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

On définit également  $\phi$  (qui n'est pas dans  $E$ ) par

$$\phi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, 0[ \\ 1 & \text{si } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

- Montrer que  $\|f_n - \phi\|_{L^2([-1, 1])} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et en déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy de  $(E, \|\cdot\|_{L^2})$ .
- On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $(E, \|\cdot\|_{L^2})$ . Notons  $f \in E$  sa limite. Justifier qu'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in [-\eta, \eta]$ ,  $|f(t) - f(0)| \leq \frac{1}{2}$ .
- En déduire que l'inégalité  $|f(t) - \phi(t)| \geq \frac{1}{2}$  est vraie  $\forall t \in [-\eta, 0[$  ou alors  $\forall t \in [0, \eta]$ .
- En déduire une contradiction et conclure que  $(E, \|\cdot\|_{L^2})$  est un espace préhilbertien qui n'est pas complet.

### Séries de Fourier dans $L^2$

**Exercice 9.** A l'aide de l'exercice 2 du TD 4, montrer les égalités suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. & 2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \\ 3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}. & 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \\ 5. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. & 6. \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}. \end{array}$$

**Exercice 10.** Soit  $f \in L^2([0, 2\pi])$ . Montrer que

$$c_n(f^2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(f).$$

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et localement intégrable telle que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$

Montrer que  $f$  est  $\pi$ -périodique.