M1 MEEF
Université Bretagne Sud
2015-2016

Correction de la question 5 de l'exercice 2 de la session 2

On suppose l'étude faite sur $n = 10000$ *personnes. En approchant* X_n *par la question 3 et sachant que pour* $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ *une gaussienne centrée réduite on a* $\mathbb{P}(N \leqslant 1.64) = 0.95$*, déterminer* $x_{0.1}$ *pour que* $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.1}\right) \leqslant 0.1$.

Pour reprendre la question 3, on sait que $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ est une somme de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de loi une Bernoulli de paramètre p. Donc le théorème central limite nous assure que $\frac{X_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite. On en fera donc l'hypothèse que

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \simeq N$$

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ est une gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. En conséquence, on écrit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.1}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left|\frac{X_n - np}{n}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} x_{0.1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|X_n - np|}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} > \frac{\sqrt{n}x_{0.1}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(N > \frac{\sqrt{n}x_{0.1}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, et c'était notre passage délicat, puisque $p(1-p) \leqslant 1/4$, on sait que $\frac{\sqrt{n}x_{0.1}}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant 2\sqrt{n}x_{0.1}$. Donc si $N > \frac{\sqrt{n}x_{0.1}}{\sqrt{p(1-p)}}$ alors $N > 2\sqrt{n}x_{0.1}$ (et c'est dans ce sens et pas un autre), c'est-à-dire que le premier évènement implique le second évènement qui est, par suite, « plus gros ». Donc la probabilité du premier est plus petite que la probabilité du second :

$$\mathbb{P}\left(N > \frac{\sqrt{n}x_{0.1}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_{0.1}\right).$$

On résume, d'une part on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.1}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_{0.1}\right),$$

d'autre part, lorsque $2\sqrt{n}x_{0.1} \geqslant 1,64$ (ou vous pouvez remplacer les inégalités par des égalités si vous préférez), on a

$$\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_{0.1}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(N > 1,64\right) \leqslant 0,1.$$

Donc lorsque $x_{0.1} \geqslant \frac{1,64}{2\sqrt{n}} = \frac{1,64}{200} = 0,0082$, on conclut que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > 0,0082\right) \leqslant 0,1.$$