M1 MEEF 2015-2016
Séquence 3

Correction du Devoir Maison. APS Séquence 3.

Solution de l'exercice 1. *Equations différentielles.*

Question 1. Considérons $x(t)$. Il y a deux façons de produire de l'enzyme et une façon pour la faire disparaître. D'une part, E disparaît pour former le complexe substrat-enzyme, ce qui nous donne le terme $-k_1x(t)$, d'autre part il apparaît par séparation du complexe substrat-enzyme relâchant soit un substrat S (non noté dans cette équation car considéré en surplus), ce qui nous donne le terme $k_2y(t)$, soit en relâchant un produit P, ce qui nous donne le terme $k_3y(t)$. Au bilan, la variation de la concentration d'enzyme vaut :

$$x'(t) = -k_1x(t) + (k_2+k_3)y(t), \qquad \forall t \geqslant 0.$$

De la même façon, on obtient

$$\begin{aligned} y'(t) &= k_1x(t) - (k_2+k_3)y(t), \\ z'(t) &= k_3y(t), \qquad\qquad \forall t \geqslant 0. \end{aligned}$$

Question 2. Soit $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Puisque x, y et z sont trois fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, X est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ également. De plus les trois équations différentielles écrites à la question précédente sont équivalentes au système suivant : pour tout $t \geqslant 0$,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1x(t) + (k_2+k_3)y(t) \\ k_1x(t) - (k_2+k_3)y(t) \\ k_3y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2+k_3 & 0 \\ k_1 & -(k_2+k_3) & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A_0X(t),$$

avec $A_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2+k_3 & 0 \\ k_1 & -(k_2+k_3) & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3. Procédons par récurrence. On a déjà vu dans la question 2 que la fonction X était de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons désormais que la fonction X soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, +\infty[$. Alors puisque A_0 est une matrice constante, la fonction $t \mapsto A_0X(t)$ est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0, +\infty[$, id est X' est de classe $\mathscr{C}^n$. Ainsi on en déduit que X est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et la propriété est héréditaire. On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, X est de classe $\mathscr{C}^n$, c'est-à-dire que X est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Question 4. Par définition $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R}^3)$. Il est non vide car l'application nulle est un élément évident de $\mathscr{S}$. Montrons que cette partie est stable par combinaison linéaire : soient X_1 et X_2 deux solutions de $\mathscr{S}$ et λ_1 et λ_2 deux réels. Alors $t \mapsto \lambda_1X_1(t) + \lambda_2X_2(t)$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ ($\mathscr{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel). De plus, pour tout $t \geqslant 0$,

$$(\lambda_1X_1(t) + \lambda_2X_2(t))' = \lambda_1X_1'(t) + \lambda_2X_2'(t).$$

Or X_1 et X_2 sont solutions de (1), donc pour tout $t \geqslant 0$,

$$(\lambda_1X_1(t) + \lambda_2X_2(t))' = \lambda_1A_0X_1(t) + \lambda_2A_0X_2(t) = A_0(\lambda_1X_1(t) + \lambda_2X_2(t)).$$

Ceci prouve bien que $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 \in \mathscr{S}$ et que donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R}^3)$.
Montrons que δ_0 est un isomorphisme. Tout d'abord, δ_0 est linéaire : soient à nouveau X_1 et X_2 deux éléments de $\mathscr{S}$ et λ_1 et λ_2 deux réels. Alors

$$\delta_0(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2) = (\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2)(0) = \lambda_1X_1(0) + \lambda_2X_2(0) = \lambda_1\delta_0(X_1) + \lambda_2\delta_0(X_2).$$

Donc δ_0 est linéaire. De plus par le théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque A_0 est constante, on sait que si $X(0) = X_0$ est fixé, alors il existe une et une seule solution au problème $\mathscr{S}$, c'est-à-dire que pour tout élément $X_0 \in \mathbb{R}^3$, il existe un et un seul antécédent de X_0 dans $\mathscr{S}$ par δ_0 ou encore que δ_0 est bijective. Ainsi δ_0 est bien un isomorphisme.
Un petit rappel qui ne fera pas de mal. Pour énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, pensez à préciser que les coefficients sont continus. Voici donc rien que pour vous LE résultat à connaître pour les équations différentielles.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz linéaire) *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a : I \to \mathscr{L}(E)$, $b : I \to E$, $t_0 \in I$ un réel fixé et x_0 un vecteur fixé de E. Si l'on suppose a et b continues sur I, alors le problème de Cauchy suivant d'inconnue une fonction dérivable $x : I \to E$, telle que*

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = a(t).(x(t)) + b(t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

admet une et une seule solution.

On peut aussi le formuler dans sa version matricielle :

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz linéaire) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B : I \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ un réel fixé et $X_0 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. Si l'on suppose A et B continues sur I, alors le problème de Cauchy suivant d'inconnue une fonction dérivable $X : I \to \mathbb{R}^n$, telle que*

$$\forall t \in I, \qquad X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$
$$X(t_0) = X_0,$$

admet une et une seule solution.

Question 5. Puisque δ_0 est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathscr{S}$ et $\mathbb{R}^3$, on a directement

$$\dim(\mathscr{S}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3.$$

Et on note que $\mathscr{S}$ est un sous-espace de dimension 3 d'un espace vectoriel $\mathscr{C}^1\left([0;+\infty[, \mathbb{R}^3\right)$ qui est lui de dimension infinie (considérer la famille de fonctions $(t \mapsto t^n)_{n \geqslant 0}$ qui est une famille libre et infinie de $\mathscr{C}^1\left([0;+\infty[, \mathbb{R}^3\right)$).
Question 6. Si X est solution de (1) munie de ces conditions initiales alors on cherche un élément de $\mathscr{S}$ vérifiant $X(0) = (1, 0, 0)$. On cherche donc un antécédent de $(1, 0, 0)$ par δ_0. Donc d'après la question 4, il existe un unique antécédent, soit une unique solution munie de ces conditions initiales. On pouvait également invoquer à nouveau directement le théorème de Cauchy-Lipschitz pour affirmer l'existence et l'unicité de la solution.
Question 7. Pour montrer que A est diagonalisable, toute l'artillerie habituelle de l'algèbre linéaire pouvait être utilisée. Ici une valeur propre « saute aux yeux ». La deuxième ligne est exactement l'opposée de la première ligne. La matrice n'est donc que de rang 1 (si tous les k_i ne sont pas nuls naturellement), non inversible, son noyau n'est pas réduit au vecteur nul. Bref 0 est donc valeur propre. De plus on note que

$$A\begin{pmatrix} k_2 + k_3 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 + k_3 \\ k_1 & -(k_2 + k_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2 + k_3 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $(k_2 + k_3, k_1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Si vous trouvez que mon vecteur propre est trop parachuté, on pouvait le trouver (ou en trouver un colinéaire) en résolvant

le système $AU = 0$ d'inconnu U.
Maintenant je prétends qu'il y a un second vecteur propre « évident ». Alors non ce n'est pas $(1, 1)$ mais $(-1, 1)$. En effet,

$$A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1 + k_2 + k_3\\-(k_1 + k_2 + k_3)\end{pmatrix} = -(k_1 + k_2 + k_3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Posons

$$k = k_1 + k_2 + k_3.$$

On voit par le calcul précédent que $-k$ est la seconde valeur propre et que $(-1, 1)$ est un vecteur propre associé.
La matrice A possède deux valeurs propres distinctes (les k_i sont supposés strictement positifs) et est donc diagonalisable (son polynôme caractéristique est nécessairement scindé à racine simple).
De plus une forme diagonale D est

$$D = \begin{pmatrix}-k & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

avec pour matrice de passage associée (possible)

$$P = \begin{pmatrix}-1 & k_2 + k_3\\1 & k_1\end{pmatrix}.$$

Ainsi avec ces notations,

$$A = PDP^{-1}.$$

Notez que pour D vous pouviez aussi prendre $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -k\end{pmatrix}$ en changeant la matrice de passage et que la matrice de passage peut aussi être modifiée en changeant une colonne par un autre vecteur colinéaire (bref n'importe lequel dans le bon espace propre).
Question 8. Avec les notations de la question précédente, posons $Z = P^{-1}Y$. Puisque Y est $\mathscr{C}^1$ et que P^{-1} est une matrice constante, la fonction Z est également $\mathscr{C}^1$. De plus, pour tout $t \geqslant 0$,

$$Z'(t) = P^{-1}Y'(t) = P^{-1}AY(t) = P^{-1}PDP^{-1}Y(t) = DZ(t).$$

Réciproquement, et de la même façon, si Z est une solution $\mathscr{C}^1$ de $Z' = DZ$ alors $Y = PZ$ est $\mathscr{C}^1$ et solution de $Y' = AY$. Résoudre l'équation en Z est donc équivalent à résoudre l'équation en Y.
Posons $Z(t) = (u(t), v(t))$, pour tout $t \in [0, +\infty[$. Alors le système $Z' = DZ$ implique d'une part,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u'(t) = -ku(t).$$

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u(t) = C_1 \mathrm{e}^{-kt}.$$

D'autre part,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad v'(t) = 0.$$

Et naturellement, il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad v(t) = C_2.$$

D'où, Y est une solution de $Y' = AY$ si et seulement s'il existe C_1 et C_2 deux constantes réelles telles que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad Y(t) = PZ = \begin{pmatrix}-1 & k_2 + k_3\\1 & k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1 \mathrm{e}^{-kt}\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_1 \mathrm{e}^{-kt} + (k_2 + k_3)C_2\\C_1 \mathrm{e}^{-kt} + k_1 C_2\end{pmatrix}.$$

Question 9. En reprenant la question 1 et 2, et en posant $Y(t) = (x(t), y(t))$, on observe que Y est solution de $Y' = AY$. Donc d'après la question précédente,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 \mathrm{e}^{-kt} + (k_2 + k_3)C_2 \\ C_1 \mathrm{e}^{-kt} + k_1 C_2 \end{pmatrix}.$$

De plus puisque $y(0) = 0$,

$$0 = C_1 + k_1 C_2.$$

Donc,

$$C_1 = -k_1 C_2.$$

Puisque $x(0) = 1$, on en déduit également que

$$1 = k_1 C_2 + (k_2 + k_3)C_2,$$

et donc,

$$C_2 = 1/k \qquad \text{et} \qquad C_1 = -k_1/k.$$

Ainsi

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{k} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_2+k_3}{k} \\ -\frac{k_1}{k} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_1}{k} \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste plus qu'à déterminer z.

$$\forall t \geqslant 0, \qquad z'(t) = -\frac{k_1 k_3}{k} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_1 k_3}{k}.$$

En intégrant, il vient qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad z(t) = \frac{k_1 k_3}{k^2} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_1 k_3}{k} t + C_3.$$

Comme $z(0) = 0$, on trouve,

$$C_3 = -\frac{k_1 k_3}{k^2}.$$

Donc

$$\forall t \geqslant 0, \qquad z(t) = \frac{k_1 k_3}{k^2} \left(\mathrm{e}^{-kt} - 1 \right) + \frac{k_1 k_3}{k} t.$$

Et on conclut que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{k} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_2+k_3}{k} \\ -\frac{k_1}{k} \mathrm{e}^{-kt} + \frac{k_1}{k} \\ \frac{k_1 k_3}{k^2} \left(\mathrm{e}^{-kt} - 1 \right) + \frac{k_1 k_3}{k} t \end{pmatrix},$$

où l'on rappelle que $k = k_1 + k_2 + k_3$.

Question 10. En regardant ces équations, on voit que l'on a un régime « pratiquement stationnaire » qui s'établit exponentiellement vite. D'une part

$$\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_2+k_3}{k} \\ \frac{k_1}{k} \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que les concentrations d'enzymes et de complexes substrat-enzyme se stabilisent autour des valeurs $\frac{k_2+k_3}{k}$ et $\frac{k_1}{k}$. D'autre part,

$$z(t) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{k_1 k_3}{k} t.$$

Donc la concentration de produit croit, après un court instant, linéairement au cours du temps. Notamment elle tend vers l'infini. Cette absurdité physique provient de l'hypothèse que le substrat est en quantité infinie. Si vous possédez une quantité infinie de lait vous pourrez produire une quantité infinie de beurre (au risque, non négligeable, d'en faire du doux si jamais le sel n'est pas lui en quantité infinie). Ce modèle n'est donc valide que pour les temps t pour lesquels on n'aura pas encore trop consommé de substrats et que celui-ci reste toujours prépondérant devant le nombre d'enzymes.

Solution de l'exercice 2. *Espaces Vectoriels Normés.*

Question 1. Toutes les fonctions constantes ont une dérivée nulle et donc une norme prime nulle. Soit f la fonction constante égale à 1. Naturellement $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. La fonction f n'est pas nulle et pourtant $\|f\|'_\infty = 0$. Ceci contredit donc la propriété de séparabilité de la norme. Donc $\|.\|'_\infty$ n'est pas une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
Question 2. On sait que $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Par définition, E est inclus dans $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. E est une partie non vide puisque l'application nulle est dans E. Soient maintenant f et g deux éléments de E et λ et μ deux réels. Puisque f et g sont dans E, ils appartiennent à $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel. Donc,

$$\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}).$$

De plus,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0).$$

Comme f et g sont dans E, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. D'où,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = 0.$$

Ce qui nous prouve que $\lambda f + \mu g \in E$ et que finalement E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
Question 3. Soient f et g deux éléments de E et λ un réel. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} |f(t) + g(t)| &\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \left(|f(t)| + |g(t)|\right)\\ &\leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. De même,

$$\|f+g\|'_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t) + g'(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)| = \|f\|'_\infty + \|g\|'_\infty.$$

De plus,

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda|\,|f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty.$$

Exactement de la même façon,

$$\|\lambda f\|'_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| = |\lambda|\,\|f\|'_\infty.$$

Enfin, si $\|f\|_\infty = 0$ alors naturellement,

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty = 0.$$

Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ et donc la fonction est nulle. Nous arrivons à la seule toute petite subtilité de la question, supposons désormais que $\|f\|'_\infty = 0$ alors cela nous dit que $\|f'\|_\infty = 0$ et par ce qui précède (qui reste vrai pour toute fonction) pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$. Donc la fonction f est constante, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = C$. Or $f \in E$. Donc $C = f(0) = 0$. Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ (l'unique fonction constante de E est la fonction nulle). Finalement si $\|f\|'_\infty = 0$ alors la fonction f est nécessairement nulle.
Toutes ces propriétés prouvent bien que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|'_\infty$ sont deux normes sur E.
Question 4. Commençons par montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|'_\infty .$$

Ou bien à la main : : soit $t \in [0,1]$,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Or $f \in E$ donc $f(0) = 0$ et donc,

$$|f(t)| \leqslant \int_0^t |f'(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|f\|'_\infty\,\mathrm{d}s = \|f\|'_\infty\, t.$$

En réalité on vient de redémontrer dans ce cas le théorème des accroissements finis,

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| \leqslant \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|\,|t-0| = \|f\|'_\infty\, t.$$

Puisque $t \leqslant 1$, $|f(t)| \leqslant \|f\|'_\infty$ et en passant au maximum,

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|'_\infty , \qquad \forall f \in E.$$

Nous pouvons maintenant répondre à la question, montrons que $B'(f,r) \subset B(f,r)$. Soit donc $g \in B'(f,r)$. Montrons que $g \in B(f,r)$. Puisque $g \in B'(f,r)$, par définition,

$$\|f-g\|'_\infty < r.$$

Comme $\|.\|_\infty \leqslant \|.\|'_\infty$, on en déduit directement que

$$\|f-g\|_\infty \leqslant \|f-g\|'_\infty < r.$$

Ce qui signifie exactement que $g \in B(f,r)$ ceci étant vrai pour tout $g \in B'(f,r)$ on conclut bien que

$$B'(f,r) \subset B(f,r).$$

Question 5. Soit Ω un ouvert de $(E, \|.\|_\infty)$, id est,

$$\forall f \in \Omega,\ \exists r > 0, \qquad B(f,r) \subset \Omega.$$

Par la question précédente, on en déduit directement que

$$\forall f \in \Omega,\ \exists r > 0, \qquad B'(f,r) \subset B(f,r) \subset \Omega.$$

Ainsi Ω est aussi un ouvert de $(E, \|.\|'_\infty)$
Question 6. Au moins deux façons. Première méthode : par la caractérisation séquentielle. Soit F un fermé de $(E, \|.\|_\infty)$. Alors pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f pour la norme $\|.\|_\infty$: $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, alors $f \in F$. Montrons que cette

propriété est encore vraie pour la norme $\|.\|'_\infty$ afin de conclure que F est un fermé de $(E, \|.\|'_\infty)$. Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|'_\infty = 0.$$

Alors par la question 4,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|'_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, et comme F est fermé pour $(E, \|.\|_\infty)$, on en déduit que $f \in F$. On a donc montré que F vérifie la caractérisation séquentielle des fermés pour $\|.\|'_\infty$. Ainsi F est aussi un fermé pour $\|.\|'_\infty$.

Seconde méthode : par la question précédente. Par définition, si F est un fermé de $(E, \|.\|_\infty)$, alors $\Omega = F^c$ est un ouvert de $(E, \|.\|_\infty)$. Donc par la question 5, F^c est aussi un ouvert de $(E, \|.\|'_\infty)$ et donc F est un fermé de $(E, \|.\|'_\infty)$.

Question 7. On a déjà vu que

$$\|.\|_\infty \leqslant \|.\|'_\infty .$$

Montrons que l'inégalité inverse n'est vraie pour aucune constante α. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $f \in E$, on ait

$$\|f\|'_\infty \leqslant \alpha \|f\|_\infty .$$

Pour tout $n \geqslant 1$, considérons la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$, $\forall x \in [0,1]$. On n'oublie pas de vérifier que chaque f_n est dans E. On sait que f_n, étant un monôme, est bien $\mathscr{C}^1$ et de plus $f_n(0) = 0^n = 0$. Donc pour tout $n \geqslant 1$, $f_n \in E$. Or $\|f_n\|_\infty = 1$ (pour tout $x \in [0,1]$, $|x^n| \leqslant 1^n = 1$ et la valeur 1 est atteinte en $x = 1$). De plus pour tout $n \geqslant 1$, tout $x \in [0,1]$, $f'_n(x) = nx^{n-1}$ donc de même $\|f\|'_\infty = n$. Par l'hypothèse formulée plus haut on a donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$n \leqslant \alpha.$$

Ce qui est évidemment faux dès que $n > \alpha$. L'affirmation étant fausse on conclut que les deux normes ne peuvent pas être équivalentes sur E.

Solution de l'exercice 3. *Calcul Différentiel et Statistique Descriptive.*

Question 1. La quantité $nf(a,b)$ représente la distance au sens des moindres carrés du nuage de points $(x_i, y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ à la droite d'équation $y = ax + b$.

Question 2. Commençons par expliciter les différentes quantités.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Comme la variable charge uniformément chaque point, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = x_i) = 1/n$. D'où,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

De la même façon, nous avons,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \mathbb{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Mais patatras, les définitions de X et Y, sans être fausses ne sont pas assez précises car il faut les corréler correctement (l'énoncé ne disait pas si elles étaient indépendantes ou si elles étaient liées et si elles étaient liées, de quelle façon). En effet lorsque l'abscisse $X = x_i$ c'est que l'on a choisi le point i, dans ce cas on désire que $Y = y_i$ presque sûrement et non au contraire que Y puisse prendre d'autres valeurs. Si on ne fixe pas cette condition, on ne peut pas expliciter $\mathbb{E}(XY)$. Voici une bonne définition de X et Y : considérons M la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui charge uniformément les points (x_i, y_i)

$$M \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i,y_i)}.$$

On définit alors X comme étant l'abscisse de M et Y comme étant l'ordonnée de M. On a alors $(X, Y) = M$ et dans cette construction on a pour tout $i \neq j$, $\mathbb{P}(X = x_i,\, Y = y_j) = 0$. Avec cette précision, on peut écrire,

$$\mathbb{E}\left(XY\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathbb{P}\left((X,Y) = (x_i, y_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mathbb{P}\left((X,Y) = (x_i, y_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Bon, il est temps de répondre à la question. En développant $f(a, b)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i - (ax_i + b))^2\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i^2 - 2y_i(ax_i + b) + (ax_i + b)^2\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i^2 - 2ax_iy_i - 2by_i + a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2\right]\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - 2b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + a^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ab\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b^2\\
f(a,b) &= \mathbb{E}\left(Y^2\right) - 2a\mathbb{E}\left(XY\right) - 2b\mathbb{E}\left(Y\right) + a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}\left(X\right) + b^2. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Une méthode équivalente est de poser $Z = (Y - (aX + b))^2$ et de voir que par définition de X et Y, on trouve que Z, comme fonction du couple (X, Y), charge uniformément les points $(y_i - (ax_i + b))^2$. Donc $f(a, b) = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left[(Y - (aX + b))^2\right]$. En développant dans l'espérance et en utilisant la linéarité de l'espérance, on retrouve le résultat.

Question 3. D'après (1), on voit que f est polynomiale en ses coordonnées a et b (avec que des monômes d'ordre 0, 1 ou 2). On en déduit donc directement que f est une fonction $\mathscr{C}^1$. Notamment f est différentiable. Calculons ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= \partial_1 f(a,b) = -2\mathbb{E}\left(XY\right) + 2a\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2b\mathbb{E}\left(X\right)\\
\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) &= \partial_2 f(a,b) = -2\mathbb{E}\left(Y\right) + 2a\mathbb{E}\left(X\right) + 2b.
\end{aligned}$$

On en déduit directement la différentielle : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
Df(a,b).(h,k) &= \partial_1 f(a,b) \times h + \partial_1 f(a,b) \times k\\
&= \left[-2\mathbb{E}\left(XY\right) + 2a\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2b\mathbb{E}\left(X\right)\right]h + \left[-2\mathbb{E}\left(Y\right) + 2a\mathbb{E}\left(X\right) + 2b\right]k.
\end{aligned}$$

Enfin la formule du gradient donne,

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} -2\mathbb{E}\left(XY\right) + 2a\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2b\mathbb{E}\left(X\right) \\ -2\mathbb{E}\left(Y\right) + 2a\mathbb{E}\left(X\right) + 2b \end{pmatrix}.$$

Question 4. Le couple (a_0, b_0) est un point critique si et seulement si le gradient est nul en (a_0, b_0),

$$\begin{pmatrix} -2\mathbb{E}(XY) + 2a_0\mathbb{E}(X^2) + 2b_0\mathbb{E}(X) \\ -2\mathbb{E}(Y) + 2a_0\mathbb{E}(X) + 2b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résolvons ce système. La seconde ligne implique

$$b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X).$$

En injectant cette valeur dans la première ligne, on en déduit alors que

$$-\mathbb{E}(XY) + a_0\mathbb{E}\left(X^2\right) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - a_0\mathbb{E}(X)^2 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$a_0 \operatorname{Var}(X) = \operatorname{Cov}(X, Y).$$

Finalement, l'unique point critique de f est

$$(a_0, b_0) = \left(\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}, \mathbb{E}(Y) - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}\mathbb{E}(X)\right).$$

Question 5. La fonction f ne peut pas admettre de maximum, global tout du moins. En effet, par (1),

$$\lim_{b \to +\infty} f(a, b) = \lim_{b \to +\infty} b^2 = +\infty.$$

La fonction prenant des valeurs aussi grandes que possible quand b augmente, elle ne peut pas admettre de maximum global.

Question 6. Lors du concours dans une telle question n'hésitez pas à partir de la formule de droite donnée dans la question, de tout développer et de retrouver la formule (1) pour conclure. Ici je préfère vous présenter la façon d'obtenir cette formule sans la connaître au préalable. Il s'agit de factoriser (1). Je commence par b en faisant apparaître le début d'un carré.

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= b^2 + 2b\left(a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right) + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - 2a\mathbb{E}(XY) + a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 - \left(a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - 2a\mathbb{E}(XY) + a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 + 2a\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 + \mathbb{E}\left(Y^2\right) - 2a\mathbb{E}(XY) + a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + a^2 \operatorname{Var}(X) - 2a\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Var}(Y) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + \operatorname{Var}(X)\left(a^2 - 2a\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}\right) + \operatorname{Var}(Y) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + \operatorname{Var}(X)\left(a - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}\right)^2 - \operatorname{Var}(X)\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\operatorname{Var}(X)^2} + \operatorname{Var}(Y) \\
&= \left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + \operatorname{Var}(X)\left(a - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}\right)^2 - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\operatorname{Var}(X)} + \operatorname{Var}(Y). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Et voilà !

Question 7. Puisque la variance est positive, on a

$$\left(b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\right)^2 + \operatorname{Var}(X)\left(a - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}\right)^2 \geqslant 0.$$

Donc par (2), on obtient le minorant suivant pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(a,b) \geqslant \operatorname{Var}(Y) - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\operatorname{Var}(X)}.$$

De plus on note que ce minorant est atteint en annulant les deux carrés, c'est-à-dire lorsque

$$b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X) \qquad \text{et} \qquad a = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)}.$$

Or le couple (a_0, b_0) vérifie cette égalité, donc le minorant est un minimum atteint en (a_0, b_0) (et uniquement en ce point sinon on aurait notamment eu un autre point critique). L'inégalité précédente montre bien que

$$f(a,b) \geqslant f(a_0, b_0)$$

et ce pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (et non juste localement). Ce minimum est donc bien global. Ainsi la droite $y = a_0 x + b_0$ est la droite approchant le mieux, étant la plus proche, pour laquelle la distance au sens des moindres carrés est la plus faible, du nuage de points.

Question 8. Comme on l'a vu dans la question précédente,

$$f(a_0, b_0) = \operatorname{Var}(Y) - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\operatorname{Var}(X)}.$$

On en déduit que

$$f(a_0, b_0) = \operatorname{Var}(Y)\left(1 - \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)^2}{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}\right) = \operatorname{Var}(Y)\left(1 - r^2\right).$$

Donc plus r est proche de 1 en valeur absolue, plus $(1 - r^2)$ est petit, plus $f(a_0, b_0)$ est petit et donc plus la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ sera proche au sens des moindres carrés du nuage de points. Ainsi sachant que $f(a_0, b_0)$ est la plus petite distance d'une droite au nuage de points on en déduit que plus r est proche de 1, meilleure est l'approximation du nuage de points par une droite.

Solution de l'exercice 4. *Statistique Inférentielle.*

Question 1. On s'échauffe par des questions faciles, X_1 n'est ni plus ni moins que du pile ou face. La variable X_1 est donc de loi de Bernoulli de paramètre p,

$$X_1 \sim b(p).$$

Question 2. Il est très classique de supposer les X_i tous de même loi et indépendants deux à deux. La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est dite alors indépendante et identiquement distribuée.

Question 3. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)}{n}$$

Puisque les variables sont identiquement distribuées de loi $b(p)$,

$$\forall i \geqslant 1, \qquad \mathbb{E}(X_i) = p.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{np}{n} = p.$$

Tout d'abord, on sait que

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{n^2}.$$

Ensuite, puisque les variables sont indépendantes (très important, sinon le résultat est faux en général) alors la variance de la somme est la somme des variances :

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i\right)}{n^2}.$$

Enfin puisque les variables sont identiquement distribuées de loi $b(p)$,

$$\forall i \geqslant 1, \qquad \mathrm{Var}\left(X_i\right) = p(1-p).$$

Et donc

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

La loi demandée est naturellement celle de S_n et non de S_n/n. La somme de variables indépendantes de loi de Bernoulli suit une loi binomiale :

$$S_n \sim \mathscr{B}(n,p).$$

Notez que, à moins que l'énoncé insiste particulièrement sur le fait de refaire le calcul, vous pouvez dans un écrit de CAPES affirmer directement que la somme de variables indépendantes de loi de Bernoulli suit une loi binomiale et que vaut connaissez sa moyenne et sa variance (pour en déduire celle de S_n/n).

Question 4. Comme les X_i sont indépendants, de même loi et possède un moment d'ordre 1, $\mathbb{E}\left(|X_i|\right) < +\infty$, par la loi forte des grands nombres, S_n/n converge presque sûrement vers $p = \mathbb{E}\left(X_i\right)$.

Question 5. Le fabricant A décide de soutenir l'hypothèse selon laquelle son médicament est efficace à au moins 90%. Cette proportion étant donné en théorie par p, l'hypothèse nulle H_0 qu'il favorise est donc, avec $p_0 = 0,9$,

$$H_0 \ (p \geqslant p_0) \qquad \text{contre} \qquad H_1 \ (p < p_0).$$

Question 6. Maintenant, puisque l'on n'a pas accès directement à la proportion théorique p, on approche p grâce à S_n/n qui est un estimateur consistant (qui converge vers la valeur théorique) de p d'après la question 4. Une réalisation $S_n(\omega)/n$ de la variable S_n/n nous donnera une valeur p_{emp} qui dans la plupart des cas approchera p. Le test consiste à dire que si p_{emp} est suffisamment grand alors A a raison (on ne rejette par H_0) mais si p_{emp} est trop petit alors on rejettera H_0. Cependant puisque S_n/n peut fluctuer autour de sa moyenne p (car n est fini), il se peut que S_n/n soit plus petit que p_0 (un petit peu) sans que p le soit. Puisque l'on préfère se tromper en acceptant H_0 à tort (plutôt que de rejeter H_0 à tort), on ne rejettera H_0 que si vraiment S_n/n est trop petit devant p_0, c'est-à-dire pas simplement si $S_n/n < p_0$ mais si $S_n/n < p_0 - x_\alpha$, avec $x_\alpha > 0$. Puis, plus le test sera exigent, à un niveau de confiance élevé, plus x_α sera petit. Tout cela pour vous justifier qu'il n'y a aucune ambiguïté pour construire sans se tromper les yeux fermés la zone de rejet suivante :

$$\mathscr{R}_A = \left\{ \frac{S_n}{n} < p_0 - x_\alpha \right\}.$$

Question 7. Tout d'abord, rappelons que sous H_0, $p \geqslant p_0$. Plus l'on diminue p, plus S_n/n (qui approche p pour n assez grand) aura tendance à prendre des petites valeurs. Ainsi la probabilité qu'aura S_n/n d'être plus petit que $p_0 - x_\alpha$ va augmenter. Donc plus p est petit plus $\mathbb{P}_p\left(\mathscr{R}_A\right)$ sera grande. La fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p\left(\mathscr{R}_A\right)$ est décroissante et atteint son maximum pour la plus petite valeur possible de p :

$$\max_{p \geqslant p_0} \mathbb{P}_p\left(\mathscr{R}_A\right) = \mathbb{P}_{p_0}\left(\mathscr{R}_A\right).$$

Donc si on majore $\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A)$ on majore tous les $\mathbb{P}_p(\mathscr{R}_A)$ pour $p \geqslant p_0$, c'est-à-dire que l'on majore dans tous les cas, la probabilité de rejeter H_0 alors que $p \in H_0$, de rejeter H_0 à tort.
Question 8. On note que si $S_n/n < p_0 - x_\alpha$ alors $S_n/n - p_0 < -x_\alpha \leqslant 0$ et donc $|S_n/n - p_0| > |x_\alpha| = x_\alpha$. Donc,

$$\mathscr{R}_A \subset \left\{ \frac{S_n}{n} - p_0 < -x_\alpha \right\} \subset \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p_0 \right| > x_\alpha \right\}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A) \leqslant \mathbb{P}_{p_0}\left(\left| \frac{S_n}{n} - p_0 \right| > x_\alpha \right).$$

D'où, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A) \leqslant \frac{\operatorname{Var}_{p_0}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{x_\alpha^2}.$$

Et par la question 3, on conclut que

$$\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A) \leqslant \frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2}.$$

Question 9. On dira le test juste à 90% si

$$\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A) \leqslant 1 - 0,9 = 0,1.$$

Ceci est vrai dès que

$$\frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2} \leqslant 0,1$$

id est quand

$$x_\alpha \geqslant \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{0,1n}} = \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{0,1 \times 250}} = 0,06.$$

Sans rentrer trop dans les détails d'erreur de seconde espèce, pour ne pas accepter H_0 trop souvent à tort, il vaut mieux prendre x_α le plus petit possible. On prend donc

$$x_\alpha = 0,06$$

et la zone de rejet devient

$$\mathscr{R}_A = \left\{ \frac{S_n}{n} < 0,9 - 0,06 = 0,84 \right\}.$$

Question 10. Dans notre cas, on évalue S_n/n à $p_{emp} = 0,912 = 228/250$. Puisque

$$p_{emp} \notin \mathscr{R}_A,$$

nous ne sommes pas dans la zone de rejet, nous ne rejetons pas H_0. Le fabricant A est content de son test, il le conforte dans l'idée qu'effectivement les patients ont en moyenne plus de 9 chances sur 10 de guérir avec son médicament.
Question 11. Mais B contre-attaque et met en place son propre test. De son point de vue, il préfère se tromper en affirmant que le médicament n'est pas suffisamment efficace à tort plutôt que d'affirmer que le médicament est efficace à tort. Son hypothèse nulle est donc

$$H_0\,(p < p_0) \qquad \text{contre} \qquad H_1\,(p \geqslant p_0).$$

L'hypothèse nulle est alors rejetée lorsque p, ou plutôt son estimateur S_n/n, est vraiment trop grand :

$$\mathscr{R}_B = \left\{ \frac{S_n}{n} > p_0 + x_\alpha \right\}.$$

Question 12. Ici, lorsque $p \in H_0$, $p < p_0$. De plus lorsque p augmente, S_n/n a tendance à augmenter et donc $\mathscr{R}_B$ à grossir. La fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p(\mathscr{R}_B)$ est croissante et donc

$$\sup_{p \in H_0} \mathbb{P}_p(\mathscr{R}_B) = \mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_B).$$

Puis, à nouveau, si $S_n/n > p_0 + x_\alpha$ alors $S_n/n - p_0 > x_\alpha > 0$ et donc $|S_n/n - p_0| > x_\alpha$. D'où en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\sup_{p \in H_0} \mathbb{P}_p(\mathscr{R}_B) \leqslant \mathbb{P}_{p_0}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_0\right| > x_\alpha\right) \leqslant \frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2}.$$

Question 13. Avec le même niveau de confiance le calcul pour x_α reste finalement identique

$$\frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2} = 0,1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_\alpha = 0,06.$$

La zone de rejet est alors

$$\mathscr{R}_B = \left\{\frac{S_n}{n} > 0,96\right\}.$$

Puisque $p_{emp} = 0,912$, on en déduit que l'on n'est pas dans la zone de rejet et que donc l'on ne rejette pas H_0. Ainsi le fabricant B est lui aussi très content car son test lui confirme son opinion selon laquelle le médicament est en moyenne efficace à moins de 90%.

Question 14. Tout le monde est donc content ? Non car le patient ne sait toujours pas qui croire puisque chacun à un test rigoureux mais contradictoire. Un des deux a accepté H_0 à tort, mais qui ? Le suspens étant à son comble on recommence tout avec $n = 10000$ et $p_{emp} = 0,910$. Cette fois-ci, on obtient

$$x_\alpha = \sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{0,1 \times 10000}} = 0,0095.$$

Notez que x_α est plus petit ce qui va correspondre à un test plus précis, grâce au fait que l'échantillon est de taille plus importante. Alors avec un indice de confiance de 90%, les zones de rejet deviennent :

$$\mathscr{R}_A = \left\{\frac{S_n}{n} < 0,9 - 0,0095 = 0,8905\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{R}_B = \left\{\frac{S_n}{n} > 0,9 + 0,0095 = 0,9095\right\}.$$

Cette fois-ci, bien que l'on ait à nouveau $p_{emp} \notin \mathscr{R}_A$, nous avons au contraire $p_{emp} \in \mathscr{R}_B$. Le fabricant A persiste donc à ne pas rejeter son affirmation selon laquelle la proportion de patients guéris est supérieure à $0,9$ tandis que le fabricant B rejette son hypothèse selon laquelle $p < 0,9$. Finalement le fabricant B admet que $p \geqslant 0,9$. Ainsi, dans une ambiance hollywoodienne, le fabricant A et B se réconcilient dans une poignée de main et s'en vont oeuvrer ensemble à la conception d'autres médicaments pour le bonheur de l'humanité, sous l'oeil bienveillant du statisticien qui aura su les réconcilier...

FIN