M1 MEEF 2015-2016
Séquence 3

Devoir Maison. APS Séquence 3.
A rendre pour le 13 Janvier 2016.

Le barème sur 100 *est donné à titre indicatif et* 3 *points seront réservés à la qualité de la rédaction. Bon travail !*

Exercice 1. *Equations différentielles.*
En bio-chimie, on considère une réaction enzyme-substrat formant une certaine quantité que l'on nommera produit. Le but est de décrire la réaction et de suivre la concentration de chaque espèce au cours du temps. On sait que lorsque qu'une enzyme, notée E, rencontre un substrat, noté S, ils se combinent pour former ce que l'on appelle alors un substrat-enzyme, noté SE.

$$S + E \rightleftharpoons SE.$$

Cette réaction est réversible : le substrat-enzyme peut se scinder à nouveau en une enzyme d'une part et en un substrat indemne d'autre part. Cependant lorsque l'enzyme est fixée sur le substrat, son rôle est de modifier ce substrat pour former une nouvelle molécule produit, notée P. Une fois la molécule P obtenue, l'enzyme est libérée à nouveau. On considère donc également la réaction suivante :

$$SE \to P + E.$$

Afin de simplifier le modèle, on se place dans un cadre où les substrats sont en très grande quantité devant les autres quantités. L'équation devient alors :

$$E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE \overset{k_3}{\to} P + E, \tag{1}$$

où k_1, k_2 et k_3 représentent les vitesses des différentes réactions. Pour chacune des réactions, on suppose que si le réactif A donne le(s) produit(s) B (et C) avec une vitesse k,

$$A \overset{k}{\to} B(+C),$$

alors la vitesse d'apparition de B (est égale à la vitesse d'apparition de C) est proportionnelle à la concentration de A dans le milieu et est égale à la vitesse de disparition de A :

$$\frac{\mathrm{d}[B]}{\mathrm{d}\,t}(t) \left(= \frac{\mathrm{d}[C]}{\mathrm{d}\,t}(t)\right) = k[A](t) = -\frac{\mathrm{d}[A]}{\mathrm{d}\,t}(t).$$

Au temps t, on note $x(t)$ la concentration d'enzymes E, $y(t)$ la concentration de substrats-enzymes SE et $z(t)$ la concentration de produits P. On suppose que x, y et z sont trois fonctions de $\mathscr{C}^1\left([0;+\infty[,\mathbb{R}\right)$, l'ensemble des fonctions de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. *(3 pts)* En prenant soin de considérer simultanément les trois réactions, écrire les trois équations différentielles d'ordre 1 vérifiées par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
2. *(2 pts)* Montrer que ces équations peuvent s'écrire sous forme matricielle

$$X'(t) = A_0 X(t), \qquad \text{avec } X \in \mathscr{C}^1\left([0;+\infty[,\mathbb{R}^3\right). \tag{2}$$

   où $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et A_0 est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.
3. *(2 pts)* Montrer proprement que toute solution X de (2) est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

4. *(4 pts)* Montrer que l'ensemble des solutions de (2), que l'on note $\mathscr{S}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$ et par un théorème du cours que l'application δ_0 de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par,
$$\forall X \in \mathscr{S}, \qquad \delta_0(X) = X(0),$$
est un isomorphisme.
5. *(1 pts)* En déduire que $\mathscr{S}$ est de dimension 3. Donner également mais sans justification la dimension de $\mathscr{C}^1([0;+\infty[,\mathbb{R}^3)$.
6. *(2 pts)* On considère les conditions initiales suivantes,
$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$
Justifier alors l'existence et l'unicité d'une solution à notre problème (2) muni de ces conditions initiales.
7. *(5 pts)* Justifier que la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivante
$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2+k_3 \\ k_1 & -(k_2+k_3) \end{pmatrix},$$
est diagonalisable et en donner une forme diagonale avec la matrice de passage associée.
8. *(6 pts)* Résoudre le système
$$Y'(t) = AY(t),$$
d'inconnue Y une fonction de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$.
9. *(3 pts)* En déduire les fonctions x, y et z en fonction de k_1, k_2 et k_3.
10. *(2 pts)* Donner le comportement asymptotique de chacune de ces fonctions. Comment peut-on justifier celui de z ?

Exercice 2. *Espaces Vectoriels Normés.*
Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Pour $f \in E$ on définit $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|'_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

1. *(2 pts)* Montrer que $\|.\|'_\infty$ n'est pas une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
2. *(2 pts)* Montrer que E est un espace vectoriel.
3. *(4 pts)* Montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|'_\infty$ sont deux normes sur E.
4. *(4 pts)* On note $B(f,r)$ (respectivement $B'(f,r)$) la boule ouverte de centre $f \in E$ et de rayon $r > 0$ pour la topologie de $(E, \|.\|_\infty)$ (respectivement $(E,\|.\|'_\infty)$). Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $r > 0$,
$$B'(f,r) \subset B(f,r).$$
5. *(3 pts)* En déduire que tout ouvert de $(E,\|.\|_\infty)$ est un ouvert de $(E,\|.\|'_\infty)$.
6. *(2 pts)* Montrer que tout fermé de $(E,\|.\|_\infty)$ est un fermé de $(E,\|.\|'_\infty)$.
7. *(3 pts)* Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 3. *Calcul Différentiel et Statistique Descriptive*
On considère n points du plans $((x_i,y_i))_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. Pour (a,b) deux réels quelconques, on approche ce nuage de point par une droite d'équation $y = ax+b$. On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(a,b) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i - (ax_i+b))^2\right].$$

On pose $M = (X, Y)$ la variable aléatoire qui charge uniformément les points (x_i, y_i) :

$$M \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i, y_i)}.$$

La variable X (respectivement Y) représente l'abscisse (respectivement l'ordonnée) de ces points et notamment

$$X \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \qquad \text{et} \qquad Y \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}.$$

1. *(1 pts)* Que représente $nf(a, b)$?
2. *(2 pts)* Ecrire $f(a, b)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
3. *(6 pts)* Justifier que f est différentiable, calculer ses dérivées partielles, exprimer sa différentielle ainsi que son gradient.
4. *(2 pts)* Trouver tous les points critiques de f.
5. *(2 pts)* La fonction f admet-elle un maximum global ? Justifier.
6. *(3 pts)* Montrer que l'on peut écrire f de la façon suivante :

$$f(a, b) = (b + a\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))^2 + \mathrm{Var}(X) \left(a - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} \right)^2 + \mathrm{Var}(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)^2}{\mathrm{Var}(X)}.$$

7. *(3 pts)* En déduire la nature du point critique de la question 4 que l'on notera (a_0, b_0). Cet extremum est-il global ? A quoi correspond graphiquement la droite $y = a_0 x + b_0$?
8. *(3 pts)* Calculer $f(a_0, b_0)$ et exprimer cette quantité en fonction du coefficient de corrélation r et de $\mathrm{Var}(Y)$. En déduire pourquoi on demande que r soit proche de 1 en valeur absolue pour une bonne approximation.

Exercice 4. *Statistique Inférentielle*
Un fabricant A affirme que son médicament est efficace à 90% et un fabricant concurrent B nie cette affirmation. On décide de trancher la question en s'appuyant sur une étude qui dévoile l'information suivante. Sur $n = 250$ malades qui ont été traités avec le médicament en question, 228 patients ont guéri. On note par $p_0 = 0.9$ la proportion désirée et par $p_{emp} = 0.912$ la proportion mesurée de patients guéris. On numérote les malades de 1 à n et on modélise par X_i la variable aléatoire donnant l'action du médicament sur le patient numéro i : X_i vaut 0 si le patient reste malade et 1 si le patient est guéri. On note par p la probabilité théorique qu'a un patient de guérir avec le médicament.

1. *(1 pts)* Quelle est la loi de X_1 ?
2. *(1 pts)* Quelle hypothèse est-il raisonnable de supposer sur la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$?
3. *(3 pts)* On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de S_n ? Quelle est l'espérance de S_n/n ? sa variance ?
4. *(2 pts)* Enoncé un théorème donnant la limite (en quel sens ?) de S_n/n.
5. *(2 pts)* En fonction de p, quelle est l'hypothèse nulle H_0 que le fabricant A a intérêt à favoriser ?
6. *(1 pts)* On se place du point de vue de A et donc dans le cadre de la question précédente. Compléter par le symbole adapté la région de rejet de l'hypothèse nulle suivante,

$$\mathscr{R}_A = \left\{ \frac{S_n}{n} \ldots p_0 - x_\alpha \right\},$$

où x_α est un réel strictement positif qui sera déterminé ultérieurement.

7. *(2 pts)* Pour quelle valeur de $p \in H_0$, le maximum de la fonction $p \mapsto \mathbb{P}_p(\mathscr{R}_A)$ (où sous $\mathbb{P}_p$, on considère X_1 de moyenne p) est-il atteint ? Le justifier en quelques mots.
8. *(3 pts)* Montrer par une inégalité du cours que

$$\mathbb{P}_{p_0}(\mathscr{R}_A) \leqslant \mathbb{P}_{p_0}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_0\right| > x_\alpha\right) \leqslant \frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2}.$$

9. *(1 pts)* En déduire une valeur de x_α et en déduire $\mathscr{R}_A$ pour que ce test soit juste à 90%.
10. *(2 pts)* A 90%, le fabricant A doit-il rejeter l'hypothèse nulle et admettre qu'il a tort ?
11. *(2 pts)* Si l'on se place du point de vue du concurrent B, que devient l'hypothèse nulle que souhaite favoriser B ? Compléter alors la région de rejet

$$\mathscr{R}_B = \left\{\frac{S_n}{n} \dots p_0 + x_\alpha\right\}.$$

12. *(2 pts)* Vérifier à nouveau que

$$\sup_{p \in H_0} \mathbb{P}_p(\mathscr{R}_B) \leqslant \frac{p_0(1-p_0)}{n x_\alpha^2}.$$

13. *(1 pts)* Avec le même niveau de confiance, le fabricant B doit-il admettre que A à raison ou non ?
14. *(2 pts)* Face à ces conclusions, on décide de faire une étude plus poussée sur $n = 10000$ malades. On obtient une proportion plus faible $p_{emp} = 0,910$. Pourtant montrer que cette fois-ci les deux tests aboutissent au même résultat, à 90%. Qui a raison ?