

Analyse, Probabilités et Statistiques
A rendre pour le 19 juin 2016.

Exercice 1. *Équations différentielles.*

Pour $I =]0, 1[$, on considère (E_I) l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur I solutions de l'équation

$$(E_I) \quad x(1-x)y''(x) + (1-3x)y'(x) - y(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

1. Justifier à l'aide d'un théorème du cours la structure de l'ensemble des solutions de (E_I) et justifier que si y est une solution de (E_I) alors y est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .
2. Montrer que si y_0 est une solution de (E_I) développable en série entière, avec un rayon de convergence $R > 0$, alors il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y_0(x) = \frac{a_0}{1-x},$$

et donner le rayon de convergence associé.

3. En déduire par la méthode de variation de la constante l'ensemble des solutions de (E_I) .

Exercice 2. *Statistique.*

On désire prédire l'issue d'un référendum sur la mise en place d'une réglementation pour protéger le dahu de la chasse. On note p la proportion inconnue de personnes qui voteront oui à cette réforme. On tire au hasard n personnes parmi la population française totale et on note X_n le nombre de personnes qui affirment vouloir voter oui.

1. Sous de bonnes hypothèses sur le tirage des personnes, que l'on précisera, quelle est la loi de X_n en fonction de p et de n ? Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\text{Var}(X_n)$.
2. A quoi correspond la probabilité suivante,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_\alpha\right) ?$$

3. Énoncer le théorème central limite vérifié par X_n .
4. Pour tout $p \in [0, 1]$, majorer $p(1-p)$ par une constante numérique.
5. On suppose l'étude faite sur $n = 10000$ personnes. En approchant X_n par la question 3 et sachant que pour $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ une gaussienne centrée réduite on a $\mathbb{P}(N \leq 1.64) = 0.95$, déterminer $x_{0.1}$ pour que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.1}\right) \leq 0.1$.
6. Sachant que $X_n = 5097$ personnes affirment vouloir voter oui, peut-on affirmer que le dahu sera protégé? Avec quel indice de confiance?
7. De même déterminer $x_{0.01}$, pour que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.01}\right) \leq 0.01$ sachant que $\mathbb{P}(N \leq 2.57) = 0.995$. Peut-on affirmer que le dahu sera protégé? Avec quel indice de confiance?

