

Les équations différentielles.
Classe préentielle. Exercice 8 à la minute 38.

Déterminer les solutions de $y_2'(t) = 3y_2(t) + 2t$ (E).

Correction

Naturellement on commence par déterminer les solutions de l'équation homogène associée

$$(E_H) \quad y_2'(t) = 3y_2(t).$$

Les solutions de (E_H) sont (c'est du cours)

$$\exists C \in \mathbb{R}, \text{ tel que, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_{2H}(t) = C e^{3t}.$$

De plus on sait, par le théorème de Cauchy-Schwarz, que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 1 : l'ensemble des solutions de (E_H) (espace vectoriel de dimension 1) translaté d'une solution « particulière ».

Cherchons donc une solution particulière. Le second membre $2t$ étant polynomiale, on cherche une solution de type polynomial, notamment de degré 1. Soient a et b deux réels et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_{2p}(t) := at + b.$$

On cherche une solution de (E). On note que y_{2p} est \mathcal{C}^∞ et donc notamment dérivable. De plus $y_2'(t) = a$ D'où,

$$\begin{aligned} y_{2p} \text{ est une solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_2'(t) = 3y_2(t) + 2t, \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a = 3(at + b) + 2t, \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a = 3at + 3b + 2t, \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 = (3a + 2)t + 3b - a, \\ &\Leftrightarrow 3a + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 3b - a = 0, \end{aligned}$$

car un polynôme est nul sur \mathbb{R} (ou un intervalle ou encore en plus de point strictement que son degré) si et seulement s'il est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$y_{2p} \text{ est une solution de } (E) \Leftrightarrow a = -2/3 \quad \text{et} \quad b = a/3 = -2/9.$$

Finalement, $y_{2p}(t) = -2/3(t + 1/3)$ est une solution de (E) et l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\exists C \in \mathbb{R}, \text{ tel que, } \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_2(t) = C e^{3t} - \frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{3} \right).$$

Note : dans la vidéo j'ai commencé à écrire n'importe quoi pour b , mais un auditeur attentif me reprenant, je corrige dans la suite mon erreur, et finalement je suis ici bien d'accord avec mon moi de la vidéo à la minute 41.