L2 MTH1314 2016-2017

Devoir Maison n ° 1
A rendre pour le lundi 17 Octobre

Exercice 1. Soient F l'ensemble des femmes, H celui des hommes et $M(x, y)$ la proposition « x est marié(e) avec y ». Enoncer par des phrases sans ambiguïté les propositions suivantes.

$$\begin{aligned} &A.\ \exists x \in F, \quad \forall y \in H, \quad M(x, y). \\ &B.\ \forall y \in H, \quad \exists x \in F, \quad M(x, y). \end{aligned}$$

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Nier avec des symboles logiques ainsi qu'en français ces propositions.

Exercice 2. On pose $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et on considère $*$ la loi définie par

$$\forall((x, y),(a, b)) \in G \times G, \qquad (x, y) * (a, b) = \left(xa, xb + \frac{y}{a}\right).$$

1. Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur G et montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Résoudre dans G l'équation suivante : $(3, 4) * (x, y) = (3, 6)$.
3. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de G ?

$$\begin{array}{lll} H_1 =]0; +\infty[^2, & H_2 =]0; +\infty[\times[0; +\infty[, & H_3 =]0; +\infty[\times\mathbb{R}, \\ H_4 = \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, & H_5 = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}. & \end{array}$$

4. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$H_\alpha = \left\{ \left(x, \alpha\left(x - \frac{1}{x}\right)\right),\ x \in \mathbb{R}^* \right\},$$

   est un sous-groupe de G.

Exercice 3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal $n \geqslant 2$. On note $G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et on suppose la loi $\cdot$ commutative sur G. On fixe $a \in G$ et on définit γ_a sur G par

$$\gamma_a : \quad \begin{aligned} G &\to G \\ x &\mapsto a \cdot x. \end{aligned}$$

On note encore pour tous $i \in \{1, \ldots n\}$, $y_i = \gamma_a(x_i)$ les images des x_i par γ_a.

1. Montrer que $\{y_1, \ldots, y_n\} = G$.
2. En déduire que

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} (a \cdot x_i).$$

3. Conclure que $a^n = e$, où e désigne l'élément neutre du groupe.