L2 MTH1314 2016-2017

Devoir Maison n ° 2
A rendre pour le mardi 22 Novembre

Le barème est donné à titre indicatif. La rédaction doit être personnelle et soignée.

Exercice 1. *(10 points)* Considérons $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois $+$ et $*$ définies respectivement par

$$\forall (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4, \qquad (x,y)+(a,b) = (x+a, y+b),$$
$$\forall (x,y,a,b) \in \mathbb{R}^4, \qquad (x,y)*(a,b) = (xa, xb+ya).$$

1. *(2 points)* Vérifier que $(\mathbb{R}^2,+,*)$ est un anneau commutatif. On notera $\tilde{0}$ et $\tilde{1}$ les éléments neutres pour $+$ et $*$ respectivement.
2. *(2 points)* Pour $X \in \mathbb{R}^2$, on pose $X^2 := X * X$. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $X^2 = X$,
   (b) $X^2 = \tilde{0}$,
   (c) $X^2 = \tilde{1}$.
3. *(1 point)* Déterminer les éléments inversibles de $(\mathbb{R}^2,+,*)$.
4. *(5 points)* On note $X^0 = \tilde{1}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n = X * \cdots * X$, n fois.
   (a) Si $X = (x,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$, déterminer X^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Même question si $X = (0,y)$, avec $y \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire X^n pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Redémontrer le résultat de la question précédente directement.

Exercice 2. *(10 points)*

1. *(1 point)* Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times & \to & (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array}$ est bien définie.
2. *(1 point)* Montrer que φ est un morphisme de groupes.
3. *(3 points)* Dans cette question, on cherche à déterminer le noyau de φ. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.
   (a) Montrer que $x = 1$ ou que $x^2 + x + 1 = 0$.
   (b) Factoriser $x^2 + x + 1$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. *Indication :* $x^2 + x + 1 = x^2 - 12x + 1$.
   (c) En déduire le noyau de φ.
4. *(1 point)* Vérifier que la relation $\sim$ définie par $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ est une relation d'équivalence.
5. *(2 points)* Montrer que a et b font partie de la même classe d'équivalence si et seulement si $b \in \{a, 3a, 9a\}$ et calculer les quatre classes d'équivalence.
6. *(2 points)* Déterminer $\mathrm{Im}\ (\varphi)$.
7. *(Bonus ! 3 points)* Soient $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.
   (a) Montrer que si $y \neq 0 \mod 13$, alors $2 \in \mathrm{Im}\ (\varphi)$ et en déduire que 13 divise x et y.
   (b) Montrer alors que 13 divise aussi z.
   (c) Conclure que la seule solution entière de $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ est le triplet $(0,0,0)$.