L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 2. Groupe, sous-groupe

Exercice 1. Pour chacun des ensembles suivants, muni de la loi indiquée, vérifier que la loi est une lci. Lorsque c'est le cas dire si elle est associative, commutative, s'il existe un élément neutre ou si tout élément admet un inverse. En déduire si c'est un groupe ou non.

1. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$.
2. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), +)$.
3. $(\mathbb{Z}^*, \times)$.
4. $(\mathbb{R}, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x * y = |x| \, y$.
5. $(\mathbb{R}^*, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $x * y = \frac{1}{xy}$.
6. $(\mathbb{R}^*, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $x * y = \frac{x}{y}$.
7. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall (A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, $A * B = BA$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ la l.c.i. $*$ par $a * b = a + b - ab$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe.
2. Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soit un groupe pour la loi $*$.

Exercice 3. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, ∇) deux groupes. On munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la loi : $(g_1, g_2) \otimes (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \nabla h_2)$. Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. On parle de "structure produit canonique" pour $G_1 \times G_2$.

Exercice 4.

1. Déterminer la table du groupe à deux éléments.
2. Soit $G = \{e, a, b\}$ un groupe à 3 éléments, d'élément neutre e. Montrer que $ab = e$.
3. Construire la table du groupe G et vérifier que G est commutatif.
4. Montrer que cette table est celle du groupe $\mathbb{U}_3 = (\{1, j, j^2\}, \times)$, où $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_3, \circ)$ défini par

$$G = \left\{ \mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5. Soit $G = \{e, a, b, c\}$ un groupe à 4 éléments, d'élément neutre e.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément autre que e qui est son propre symétrique.
2. On suppose par la suite que $b^{-1} = b$. Montrer alors qu'on peut distinguer deux cas : soit $a^{-1} = c$ et $c^{-1} = a$, soit $a^{-1} = a$ et $c^{-1} = c$ et construire les deux tables correspondantes. Vérifier que ces groupes sont commutatifs.
3. Montrer que la première table est celle du groupe $\mathbb{U}_4 = (\{1, i, -1, -i\}, \times)$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par

$$G = \left\{ \mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Montrer que la deuxième table est celle du sous-groupe H de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par

$$H = \left\{ \mathrm{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 6.

1. L'ensemble B des matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, est-il un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?
2. Même question pour l'ensemble D des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{R})$, puis pour l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble H des matrices du type $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$, est-il un groupe pour la multiplication matricielle ? Est-ce un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 7. Soit G un groupe, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si : $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.
3. Montrer que $G_1G_2 = \{gh,\ g \in G_1,\ h \in G_2\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $G_1G_2 = G_2G_1$.

Exercice 8. *(Définition du PGCD et du PPCM).*
Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et en déduire qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $k \in \mathbb{Z}$ divise a et b alors k divise d et que si $l \in \mathbb{Z}$ est un multiple de a et de b alors l est un multiple de m.

Exercice 9. Soit $(G, *)$ un groupe et a un élément de G. On pose

$$Z_a = \{x \in G,\ a * x = x * a\}.$$

Montrer que Z_a est un sous-groupe de G.

Exercice 10. On considère l'ensemble

$$G = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \alpha \in]-1,1[\right\}.$$

Montrer que G muni du produit matriciel usuel est un groupe.

Exercice 11. Soit G un groupe, H une partie de G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement si :

1. H est non vide,
2. si $(x, y) \in H$, alors $xy^{-1} \in H$.

Exercice 12. Soient $(G, .)$ un ensemble de cardinal fini et A et B deux parties de G telles que $\operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) > \operatorname{Card}(G)$. On pose $AB = \{ab,\ (a,b) \in A \times B\}$ et on considère pour tout $g \in G$ l'application γ_g définie par,

$$\gamma_g : \quad \begin{aligned} A &\to G \\ a &\mapsto a^{-1} * g. \end{aligned}$$

1. Montrer que γ_g est injective.
2. En déduire que $\gamma_g(A) \cap B \neq \emptyset$.
3. En déduire que $g \in AB$.
4. Conclure que $G = AB$.