

## Feuille 3. Morphismes, anneaux et corps

## Morphismes

**Exercice 1.** Soient  $(G, *)$  et  $(H, \cdot)$  deux groupes.

1. Montrer que l'application  $\pi : G \times H \rightarrow G$  définie par  $\forall (g, h) \in G \times H, \pi(g, h) = g$  est un morphisme de groupes et déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.
2. Déterminer les éléments  $h \in H$  qui font de l'application  $i_h : G \rightarrow G \times H$  définie par  $\forall g \in G, i_h(g) = (g, h)$ , un morphisme de groupes. Déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.

**Exercice 2.** Soit  $G$  un groupe.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'inversion  $J : G \rightarrow G$  définie par  $\forall g \in G, J(g) = g^{-1}$ , soit un morphisme de groupes.
2. Même question pour le carré  $q : G \rightarrow G$  défini par  $\forall g \in G, q(g) = g^2$ .

**Exercice 3.** Montrer que  $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$  est un isomorphisme de groupes.

$$n \mapsto 2n$$

**Exercice 4.** Montrer que l'application  $\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$  est un morphisme de groupe. Quel

$$z \mapsto z^n$$

est son noyau ? son image ?

**Exercice 5.**

1. Soient  $G$  et  $H$  deux ensembles. Soient  $*$  une l.c.i. de  $G$  et  $\cdot$  une l.c.i. de  $H$ . On considère  $\varphi : (G, *) \rightarrow (H, \cdot)$  un morphisme bijectif et on suppose que  $(H, \cdot)$  est un groupe commutatif. Montrer alors que  $(G, *)$  est un groupe commutatif (isomorphe à  $(H, \cdot)$ ).
2. Vérifier que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\text{sh}(a+b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{ch}(a)$ .
3. Montrer que  $(\mathbb{R}, \otimes)$  est un groupe où la loi  $\otimes$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \otimes y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}.$$

**Exercice 6.** Soit  $G$  un groupe noté multiplicativement et  $a$  un élément de  $G$ . On désigne par  $f_a$  l'application de  $G$  dans  $G$  définie par  $f_a(x) = axa^{-1}$ .

1. Montrer que  $f_a$  est un automorphisme de  $G$ , c'est-à-dire un isomorphisme de  $G$  dans lui-même. On l'appelle « automorphisme intérieur ». On désigne par  $\text{Aut } G$  l'ensemble des automorphismes de  $G$  et par  $\text{Int } G$  l'ensemble des automorphismes intérieurs de  $G$ .
2. Montrer que l'application  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } G$  est un morphisme de groupes dont on déterminera le noyau.
 
$$a \mapsto f_a$$
3. Le couple  $(\text{Int } G, \circ)$  est-il un groupe ?

**Exercice 7.** Le but de l'exercice est de montrer que  $(\mathbb{R}^*, \times)$  et  $(\mathbb{C}^*, \times)$  ne sont pas isomorphes. Soit  $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$  un isomorphisme. Notons  $\alpha = \varphi^{-1}(i)$ , l'antécédent de  $i$  par  $\varphi$ .

1. Montrer que  $\varphi(\alpha^2) = -1$ .
2. Conclure.

### Anneaux

**Exercice 8.** L'ensemble  $2\mathbb{Z}$  muni des lois  $+$  et  $\times$  est-il un anneau ?

**Exercice 9.** On définit  $A$  comme étant l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continues. On note  $+$  l'addition de deux fonctions,  $\times$  le produit et  $\circ$  la composition.

1. Quelle condition faut-il supposer sur  $f$  pour que  $f \circ (\text{Id} - \text{Id}) = f \circ \text{Id} + f \circ (-\text{Id})$ , où  $\text{Id} : x \mapsto x$  est la fonction identité sur  $\mathbb{R}$ . En déduire que  $(A, +, \circ)$  n'est pas un anneau.
2. Vérifier que  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif. On note  $0_A$  et  $1_A$  les éléments neutres pour  $+$  et  $\times$  respectivement.
3. Montrer qu'il existe  $f$  et  $g$  deux éléments distincts de  $0_A$  tels que  $f \times g = 0_A$ .
4. Déterminer  $A^\times$ , les éléments inversibles de  $A$ .
5. Résoudre dans  $A$  l'équation  $f^2 = 1_A$  et l'équation  $f^2 = f$ .

**Exercice 10.** On considère l'ensemble  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  des nombres réels de la forme  $a + b\sqrt{2}$ , où  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in A$ , il existe un unique couple  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x = m + n\sqrt{2}$ .
2. Montrer que  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{R}, +, \times)$ .
3. Montrer que l'application  $\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  est un automorphisme de l'anneau  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$  (c'est une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).  

$$m + n\sqrt{2} \mapsto m - n\sqrt{2}.$$
4. Pour tout  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ , on pose  $N(x) = x\phi(x)$ . Montrer que  $N$  est une application de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  dans  $\mathbb{Z}$ , qui est un morphisme pour la multiplication.
5. En déduire que  $x$  est inversible si et seulement si  $N(x) = \pm 1$ .
6. Vérifier que  $3 + 2\sqrt{2}$  et  $-3 + 2\sqrt{2}$  sont inversibles dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

### Corps

**Exercice 11.** On considère  $(\mathbb{R}^2, +, *)$  où  $+$  et  $*$  sont deux lois définies respectivement par

$$\begin{aligned} \forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ \forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, & \quad (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Montrer que  $(\mathbb{R}^2, +, *)$  est un corps et le reconnaître.

**Exercice 12.** Soit  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  un corps de cardinal fini. On pose  $K_1 = \{x \in \mathbb{K}^*, x^{-1} = x\}$  et  $K_2 = \{x \in \mathbb{K}^*, x^{-1} \neq x\}$ .

1. Déterminer tous les éléments de  $K_1$ .
2. En déduire

$$P = \prod_{x \in \mathbb{K}^*} x.$$