L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 6. Le groupe symétrique

Exercice 1.

1. Calculer $(1,\, 2) \circ (3,\, 4) \circ (4,\, 1)$.
2. Soit $n \geqslant 2$. Que dire d'une permutation ayant $n-1$ points fixes ?
3. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Peut-on conclure que σ est une transposition ?
4. Soit $k \in \{2, \dots n\}$. Calculer le nombre de cycles de longueur k dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 2.

1. Ecrire toutes les permutations de $\mathcal{S}_3$.
2. Ecrire pour chacune des permutations, la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer la signature.
3. Ecrire toutes les permutations de $\mathcal{S}_4$ et préciser leurs signatures.

Exercice 3. On considère les deux éléments suivants de $\mathcal{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 3 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces deux permutations ($s = \sigma$ puis τ) :

1. Ecrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer sa signature.
2. Calculer la composée $(1,2) \circ s$ et vérifier que $\varepsilon((1,2) \circ s) = -\varepsilon(s)$.
3. Même question pour $s \circ (1,2)$.

Exercice 3bis. Soit $n \geqslant 1$ un entier et φ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ \sigma &\mapsto (12) \circ \sigma. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est bijective.
2. Montrer que $\varphi\,(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ et que $\varphi\,(\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n) \subset \mathcal{A}_n$.
3. En déduire que Card $(\mathcal{A}_n) =$ Card $(\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n)$.
4. Conclure que Card $(\mathcal{A}_n) = \frac{n!}{2}$.

Exercice 4. *(parties génératrices de $\mathcal{S}_n$).* Soit $n \geqslant 3$ dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer $\{(1,\, i),\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$ engendre $\mathcal{S}_n$.
2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ un cycle de longueur r dans $\mathcal{S}_n$ tel que $\gamma = (j_1,\, j_2, \dots,\, j_r)$. Démontrer que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$ est le r-cycle $(\sigma(j_1),\, \sigma(j_2), \dots,\, \sigma(j_r))$.

3. Montrer alors que pour tout couple $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on a

$$(j-2,\, j-1)\dots(i+1,\, i+2)(i,\, i+1)(i,\, j)(i,\, i+1)(i+1,\, i+2)\dots(j-2,\, j-1) = (j-1,\, j).$$

   En déduire que $\{(i,\, i+1),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ engendre $\mathcal{S}_n$.

4. On pose $\gamma_1 = (1,\, 2, \dots,\, n)$ et $\tau = (1,\, 2)$, calculer $\gamma_1^p \circ \tau \circ \gamma_1^{-p}$. En déduire que les permutations τ et γ_1 engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice 5. *(ordre d'une permutation).* On définit l'ordre d'une permutation σ comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$.

1. Justifier qu'un tel entier existe.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^p = \mathrm{id}$. Quel relation y a-t-il entre p et l'ordre de σ.
3. Soit σ un cycle de longueur l. Quel est son ordre ?
4. Soient σ_1 et σ_2 deux cycles à supports disjoints de longueurs l_1 et l_2. On suppose dans cette question que $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Donner alors l'ordre de σ.
5. Si σ est un cycle de longueur l et si $k \leqslant l$ montrer que σ^k est d'ordre $\frac{l}{l \wedge k}$.

Exercice 6. Soit τ l'élément de $\mathcal{S}_{14}$ défini par

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 5 & 7 & 11 & 9 & 2 & 1 & 12 & 6 & 13 & 3 & 14 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer τ en un produit de cycles à supports disjoints et donner sa signature.
2. A l'aide de l'exercice 5, préciser l'ordre de τ.
3. Calculer τ^2, τ^3, τ^{1000}, τ^{2016} et τ^{-1}.

Exercice 7.

1. Soit $H = \{\sigma \in S_5,\, \sigma(1) = 1\}$. Vérifier que H est un sous-groupe de S_5 et trouver son cardinal.
2. Soit $K = \{\sigma \in S_5,\, \sigma(1) = 1 \text{ ou } \sigma(1) = 2\}$. Montrer que K n'est pas un sous-groupe de S_5.

Exercice 8. Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre du groupe l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G :

$$Z(G) = \{a \in G,\ \forall g \in G,\ a * g = g * a\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est toujours un sous-groupe de G.
2. Soit $n \geqslant 2$, déterminer le centre $Z(\mathcal{S}_n)$ du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

Exercice 9. Le jeu du taquin se joue avec un carré de 16 cases dont une est vide et la seule façon de changer la disposition des cases est de faire glisser une case dans la case vide. On numérote les cases non vides de 1 à 15 et la case vide par 16. Par exemple on considère la configuration initiale

16	15	14	13
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4

1. Déterminer toutes les permutations élémentaires autorisées dans $\mathcal{S}_{16}$ (quelle que soit la configuration du taquin).

2. Justifier que si la case vide est à la même place au début et à la fin alors la signature de la permutation globale est égale à 1.

3. Conclure qu'avec la configuration initiale précédente, il est impossible d'obtenir la configuration suivante :

16	14	15	13
9	10	11	12
8	7	6	5
1	2	3	4