L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 8. Les fonctions de deux variables.

Exercice 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.
2. $f_2(x,y) = \frac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$.
3. $f_3(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 2. Pour chacune des applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes,

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - xy, \qquad f_4(x,y) = 4x^2 + 4y^2 - (x+y)^4,$$
$$f_2(x,y) = x^3 + y^3 - x^2y^2, \qquad f_5(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2).$$
$$f_3(x,y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy,$$

1. Calculer le gradient de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Calculer la matrice hessienne de f.
4. Pour chacun des points critiques de f, donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
5. Pour chacun des points critiques de f, dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f.

Exercice 3. Etant donnés le domaine D de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f, dessiner D et calculer l'intégrale double de f sur D dans les cas suivants.

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, 0 < y < 1\}$, $f_1(x,y) = x^2 + y$.
2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $f_2(x,y) = x\sin(xy)$.
3. $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x\}$, $f_3(x,y) = x^2\sin(xy)$.
4. $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\}$, $f_4(x,y) = x(1-2x)\sin(xy)$.
5. $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$, où $a, b > 0$, $f_5(x,y) = x^3 + y^3$.
6. $D_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$, $f_6(x,y) = \ln(1+x+y)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^3 - x\left(1 + y^2\right).$$

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Représenter D.
3. On admet le résultat suivant : *toute fonction continue sur D est bornée et atteint ses bornes en au moins un point.* On note M la valeur du maximum de f et m la valeur du minimum de f. Montrer que si f atteint un extremum en $(x,y) \in D$, c'est-à-dire si le couple (x,y) vérifie $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors nécessairement $x^2 + y^2 = 1$.

4. On pose $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. Donner le tableau de variation de g.
5. En déduire les valeurs de M et de m ainsi que les points $(x, y) \in D$ pour lesquels ces valeurs sont atteintes.

Exercice 5. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par,

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - xy.$$

1. Donner aux points $(1, 1, f(1, 1))$, $(1, 2, f(1, 2))$, $(2, 1, f(2, 1))$ l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par $(1, 1)$, si elle existe.