L2 MTH1314 2016-2017

Activité. Formule du volume d'un parallélépipède par la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 1. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non-coplanaires de $\mathbb{R}^3$. On note par $\mathscr{P} = \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w},\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha+\beta+\gamma = 1\}$ le parallélépipède défini par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On cherche à exprimer son volume noté $\mathscr{V}$ en fonction du déterminant. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique, avec son produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$: si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

1. Pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, on construit $\vec{e_u} = \frac{1}{\lambda_1}\vec{u}$. Trouver λ_1 pour que $\vec{e_u}$ soit de norme 1 : $\|\vec{e_u}\| = 1$, et de même sens que $\vec{u}$.
2. Pour $(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$, non nuls, on construit $\vec{e_v} = \frac{1}{\lambda_3}(\vec{v} - \lambda_2\vec{e_u})$. Trouver λ_2 pour que $\vec{e_v}$ soit orthogonal à $\vec{e_u}$: $\langle \vec{e_v}, \vec{e_u} \rangle = 0$ puis trouver $\lambda_3 > 0$ pour que $\vec{e_v}$ soit de norme 1.
3. Pour $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{R}^3$, non nuls, on construit $\vec{e_w} = \frac{1}{\lambda_6}(\vec{w} - \lambda_5\vec{e_v} - \lambda_4\vec{e_u})$. Trouver λ_4 pour que $\vec{e_w}$ soit orthogonal à $\vec{e_u}$, puis λ_5 pour que $\vec{e_w}$ soit orthogonal à $\vec{e_v}$ et enfin trouver $\lambda_6 > 0$ pour que $\vec{e_w}$ soit de norme 1.
4. On note $\mathscr{B} = (\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w})$. Que dire de cette base ?
5. Donner les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cette base en fonction uniquement de leurs produits scalaires avec $\vec{e_u}$, $\vec{e_v}$ et $\vec{e_w}$.
6. Calculer $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et montrer que cela correspond bien au volume $\mathscr{V}$.
7. Soit $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée, orientée dans le même sens que $\mathscr{B}$. Ecrire les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de leurs produits scalaires. En déduire que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
8. Montrer alors que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = 1$.
9. En déduire que $\mathscr{V} = \det_{\mathscr{C}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
10. Montrer que $\langle u \wedge v, w \rangle = \mathscr{V}$.
11. Calculer $\mathscr{V}$ lorsque dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Justifier que lorsque les sommets du parallélépipède sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coordonnées entières alors le volume $\mathscr{V}$ est un entier.