L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Février 2017

Correction de l'exercice 8 du TD 1
Calcul différentiel
Notion de différentielle, définitions, premières propriétés

Exercice 8. Soit $E = \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, ayant une dérivée continue et s'annulant en 0. Soit $F = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, $\|y\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)|$, pour tout $y \in F$.

1. Justifier que l'application N définie sur E par $N(y) = \|y'\|_\infty$, pour tout $y \in E$ est une norme sur E.
2. Montrer que l'application suivante est $\mathscr{C}^1$ sur E.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E & \to & F \\ & y & \mapsto & \phi(y) = (y')^2 + y^2. \end{array}$$

Solution de l'exercice 8.

1. On commence par noter que N est bien définie sur $\mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ car si $y \in \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ alors y' est continue et donc bornée et donc $N(y)$ existe. Puis par linéarité de la dérivation et les propriétés de la norme uniforme, il est facile de vérifier que

$$\begin{array}{ll} \forall (y_1,y_2) \in \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})^2, & N(y_1+y_2) \leqslant N(y_1) + N(y_2), \\ \forall y \in \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, & N(\lambda y) = |\lambda|\, N(y). \end{array}$$

Montrons la « séparation » de N sur $\mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$: soit $y \in \mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $N(y) = 0$. Alors, par définition de N, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant |y'(t)| \leqslant N(y) = 0$ et donc $\forall t \in [0,1]$ $y'(t) = 0$. Par conséquent, on sait que y est une fonction constante sur $[0,1]$: il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) = k$. Or par définition de $\mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$, on sait que $k = y(0) = 0$ et donc pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) = 0$, y est le vecteur nul de $\mathscr{C}_0^1([0,1],\mathbb{R})$.

2. Commençons par montrer que ϕ est différentiable sur E. Fixons $y \in E$. Pour tout $h \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(y+h) = \left((y+h)'\right)^2 + (y+h)^2 &= (y')^2 + 2y'h' + (h')^2 + y^2 + 2yh + h^2 \\ &= \underbrace{(y')^2 + y^2}_{\phi(y)} + \underbrace{2y'h' + 2yh}_{L_y(h)} + \underbrace{(h')^2 + h^2}_{hN(h)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Posons pour tout $h \in E$, $L_y(h) = 2y'h' + 2yh$. Montrons que L_y est une application linéaire continus de E dans F : $L_y \in \mathscr{L}_c(E,F)$. Il est clair que L_y est linéaire. Montrons que L_y est continue. Puisque L_y est linéaire cela revient à montrer qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $h \in E$, $\|L_y(h)\|_\infty \leqslant MN(h)$ (rappelons que $L_y(h) \in F$ et que l'espace F est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$). Soit $h \in E$. On a par définition de L_y, pour tout $t \in [0,1]$, $L_y(h)(t) = 2y'(t)h'(t) + 2y(t)h(t)$. Donc

$$|L_y(h)(t)| \leqslant 2\,|y'(t)|\,|h'(t)| + 2\,|y(t)|\,|h(t)| \leqslant 2N(y)N(h) + 2\,\|y\|_\infty\,\|h\|_\infty\,.$$

Ces normes sont bien définies car y et h sont dans E et sont donc continues et de dérivées continues. Ainsi

$$\|L_y(h)\|_\infty \leqslant 2N(y)N(h) + 2\,\|y\|_\infty\,\|h\|_\infty\,. \tag{2}$$

Tentons de majorer $\|h\|_\infty$ par $N(h)$. Pour relier une fonction à sa dérivée c'est l'égalité élémentaire suivante (vraie car h' existe et est continue) :

$$\forall t \in [0,1], \qquad h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Notons que $h(0) = 0$ car $h \in E$. Donc, pour tout $t \in [0,1]$:

$$|h(t)| = \left|\int_0^t h'(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t |h'(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t N(h)\,\mathrm{d}s = N(h)\int_0^t 1\,\mathrm{d}s = N(h)\times t \leqslant N(h).$$

On en déduit que pour tout $h \in E$,

$$\|h\|_\infty \leqslant N(h). \tag{3}$$

Revenons à (2), par l'inégalité précédente,

$$\|L_y(h)\|_\infty \leqslant 2N(y)N(h) + 2\|y\|_\infty N(h) = 2\left(N(y) + \|y\|_\infty\right)N(h).$$

Ceci étant vrai pour tout $h \in E$, on obtient que L_y est bien continue et de plus :

$$\|L_y\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant 2\left(N(y) + \|y\|_\infty\right). \tag{4}$$

Posons maintenant pour tout $h \in E \setminus \{0\}$, $\varepsilon(h) = \frac{(h')^2 + h^2}{N(h)}$. Pour tout $h \in E \setminus \{0\}$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$|\varepsilon(h)(t)| = \frac{(h')^2(t) + h^2(t)}{N(h)} \leqslant \frac{N(h)^2 + \|h\|_\infty^2}{N(h)}.$$

Donc en passant à la borne supérieure et par (3),

$$\|\varepsilon(h)\|_\infty \leqslant \frac{N(h)^2 + N(h)^2}{N(h)} = 2N(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement par la décomposition (1), la linéarité et la continuité de L_y et le fait que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ on en déduit que ϕ est différentiable en y et que :

$$\forall h \in E, \qquad d_y\phi(h) = L_y(h) = 2y'h' + 2yh.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, on en déduit que ϕ est différentiable sur E. Montrons que ϕ est $\mathscr{C}^1$, c'est-à-dire que l'application de E dans $\mathscr{L}_c(E,F)$ définie par $y \mapsto d_y\phi$ est continue sur E. Il nous faut donc montrer que $\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \longrightarrow 0$ lorsque $y \to 0$. On a, pour tout $h \in E$:

$$d_{y_0+y}\phi(h) - d_{y_0}\phi(h) = 2\left(y_0+y\right)' h' + 2\left(y_0+y\right)h - 2y_0'h' - 2y_0h = 2y'h' + 2yh.$$

On observe donc que $d_{y_0+y}\phi(h) - d_{y_0}\phi = d_y\phi$. Par conséquent,

$$\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = \|d_y\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = \|L_y\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$$

En utilisant (4), on en déduit que

$$\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant 2\left(N(y) + \|y\|_\infty\right)$$

Or par (3),

$$\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \leqslant 4N(y).$$

Finalement :

$$\lim_{y\to 0}\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = \lim_{N(y)\to 0}\|d_{y_0+y}\phi - d_{y_0}\phi\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} = 0$$

et on a montré que ϕ est $\mathscr{C}^1$. En réalité on a vu au passage que $y \mapsto d_y\phi$ est linéaire et continue. On peut donc en déduire que $y \mapsto d_y\phi$ est différentiable et même $\mathscr{C}^1$ c'est-à-dire que ϕ est $\mathscr{C}^2$. Peut-on espérer mieux ?