Licence Mathématiques, Informatique et Statistique 3ème année

Mathématiques 1610

Travail à rendre à M. Lauvergnat le mardi 25 avril 2017. Le travail peut être effectué en groupe mais la rédaction doit être ***personnelle****. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
Responsables : MM. Benoît Cosson & Ronan Lauvergnat

Exercice 1 : Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(tx;ty) = t^r f(x;y)$.

1) Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2) Montrer que f est homogène de degré r si et seulement si
$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = rf(x;y)$$
3) Montrer que si f est homogène de degré r et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ alors,
$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = r(r-1)f(x;y)$$

Exercice 2 : On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \frac{2}{n+1}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2) Soit $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels compris entre $]0,1[$. Justifier que
$$\int_{1-\delta_n}^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geqslant \delta_n \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n,$$
et montrer que lorsque $\delta_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors
$$\left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n\delta_n + o(n\delta_n)\right).$$
3) En choisissant convenablement la suite $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$, déduire de la question précédente que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.
4) Calculer ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.
5) Justifier que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge.
6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = (-1)^n \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1[$.
7) Soit $a \in]0,1[$, calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
8) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.