L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
Janvier 2017

Feuille de TD 2
Calcul différentiel
Dérivées directionnelles

Exercice 1. Justifier que les deux fonctions suivantes sont différentiables, calculer leurs gradients et en déduire leurs différentielles,

$$f(x,y,z) = 2 + 3z + xy + z\sin\left(x^2+y^2\right), \qquad g(x,y) = 1 + x\sqrt{y^2+2}.$$

Exercice 2. Calculer la jacobienne des applications suivantes,

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y,z) = (\sin(xyz),\, x+\mathrm{e}^z,\, y+z)\,, & f_2(x,y,z) = (x\,\mathrm{ch}(y),\, \mathrm{e}^y\cos(z))\,, \\ f_3(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy}\,(\cos(z)+\sin(y))\,, & f_4(x,y) = \left(x,\, y\,\mathrm{e}^x,\, xy^2\right), \\ f_5(x) = \left(\mathrm{e}^x,\, x^3,\, \cos(x)\right). & \end{array}$$

Exercice 3. Pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on construit g par

$$g(u,v) = f\left(\cos(u)+\sin(v),\, \sin(u)+\cos(v),\, \mathrm{e}^{u-v}\right) \qquad \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

On suppose que f est différentiable au point $A = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ et que sa Jacobienne au point A est :

$$Jac_f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Justifier que g est différentiable en $a = (\pi/2, \pi/2)$ et calculer la différentielle de g en a.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel normé et $f : \mathbb{R}^2 \to E$ une application différentiable. On définit

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R} & \to & E, \\ & x & \mapsto & f(x,-x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} v: & \mathbb{R}^2 & \to & E \\ & (x,y) & \mapsto & f(y,x). \end{array}$$

1. Montrer que u et v sont différentiables et calculer leurs différentielles en fonction de la différentielle de f.
2. Calculer les dérivées partielles de u et v en fonction de celle de f.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcccccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & & \\ & (x,y) & \mapsto & y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si} & y \neq 0 \\ & & & 0 & \text{si} & y = 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue.
2. Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles.
3. Déterminer les points pour lesquels la fonction f est différentiable.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rcccccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & & \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ & & & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0). \end{array}$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Démontrer que f admet toutes des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$.
3. Montrer cependant que f n'est pas différentiable.

Exercice 7. On considère,

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

1. Démontrer l'inégalité suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2|xy| \leqslant x^2+y^2$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent et les calculer.
4. Montrer cependant que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 8. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

1. Justifier que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. Calculer, en inversant une certaine matrice, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Déterminer toutes les fonctions $\mathscr{C}^1$ vérifiant
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 9. Soit

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy=1\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{array}$$

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer df. En déduire les valeurs de f.

Exercice 10. On considère

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y, x^2+y^2) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g = f \circ f.$$

1. Justifier que f et g sont $\mathscr{C}^1$ et calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J_f(x,y)$ la jacobienne de f et $J_g(x,y)$ la jacobienne de g.
2. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B((0,0),\rho)}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ), on a $\left\| d_{(x,y)}g \right\| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B((0,0),\rho)}$.

Exercice 11. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)). \end{array}$$

Exercice 12. Soit

$$\varphi: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (x+y, xy). \end{array}$$

On pose également $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u < v\}$. Montrer que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U dans un ouvert V que l'on déterminera.