

Feuille de TD 3
Calcul différentiel

Différentielles d'ordre supérieure et extrema

Exercice 1.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
 $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Indication : poser $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 2. Écrire le développement de Taylor à l'ordre de 2 au voisinage de $(0, 0)$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ de $\frac{e^x - (1+x) \cos y}{(x^2 + y^2) \cos y}$.

Exercice 3. Déterminer les extremums et dire s'ils sont locaux ou globaux des applications suivantes.

1. $f_1(x, y) = x^2 - y^2$.
2. $f_2(x, y) = x^3 - y^3$.
3. $f_3(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $f_4(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 4. Déterminer suivant les valeurs du paramètre λ , la nature des extremums de la fonction

$$f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

Exercice 5. Étudier les extrema de la fonction

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + 2x - z.$$

Exercice 6. Déterminer le volume maximal d'un parallélépipède rectangle dont la surface fait $2m^2$.

Exercice 7. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$ par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$