

Feuille de TD 7
Séries de Fourier

Exercice 1. Déterminer la périodicité et la parité des fonctions suivantes. Dessiner leurs graphes et calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f_1(t) = |t|$ sur $[-1, 1]$, prolongée en une fonction 2-périodique.
2. $f_2(t) = |\sin(t)|$ sur \mathbb{R} .
3. $f_3(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{sur } [0, \pi[, \\ (2\pi - t)(t - \pi) & \text{sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π -périodique.
4. $f_4(t) = \frac{t}{T}$ sur $[0, T[$, prolongée en une fonction T -périodique, $T > 0$.
5. $f_5(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, \pi[, \\ -1 & \text{sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π -périodique.
6. $f_6(t) = e^{i\pi z t}$ sur $[0, 2[$, prolongée en une fonction 2-périodique, où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique et Riemann-intégrable sur $[0, T]$. Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on définit $\check{f}(t) = f(-t)$, $\tau_{t_0}f(t) = f(t - t_0)$ et $f_a(t) = f(at)$ sur \mathbb{R} .

1. Calculer alors les coefficients de Fourier $c_n(\check{f})$, $c_n(\tau_{t_0})$ et $c_n(f_a)$ en fonction de ceux de f .
2. Si de plus la fonction f est de classe \mathcal{C}^p , donner les coefficients de Fourier $c_n(f^{(p)})$ en fonction de ceux de f .
3. Dédire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de $|\cos(t)|$.

Exercice 3. Soit f une fonction T -périodique et Riemann-intégrable sur $[0, T]$. Vérifier que f est aussi $2T$ -périodique, Riemann-intégrable sur $[0, 2T]$ et exprimer ses coefficients $c'_n(f)$ associés à la période $2T$, en fonction des $c_n(f)$. En déduire que les développements en série de Fourier sont identiques.

Exercice 4. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t) = \sin^3(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On reprend la fonction f_5 de l'exercice 2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

1. Justifier que S_N est dérivable sur \mathbb{R} et montrer que

$$S'_N(0) = 4(N+1)/\pi, \quad S'_N(\pi) = -4(N+1)/\pi,$$

et que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad S'_N(x) = \frac{2 \sin(2(N+1)x)}{\pi \sin(x)}.$$

En déduire que S_N possède $2N+1$ extremums entre $]0, \pi[$, que le premier et le dernier sont des maximums et que le premier est atteint en $\pi/(2(N+1))$.

2. Justifier que

$$S_N \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin(2(N+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

3. On pose pour tout $N \geq 1$ $u_N : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall s \in]0, \pi], \quad u_N(s) = \frac{\sin(s)}{2(N+1) \sin\left(\frac{s}{2(N+1)}\right)},$$

et $u_N(0) = 1$. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_N)_{N \geq 1}$ sur $[0, \pi]$.

4. Montrer par un développement de Taylor de la fonction sinus que, pour tout réel x ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \sin(x) \leq x + \frac{x^2}{2}$$

et en déduire que $(u_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

5. Montrer à l'aide des questions précédentes que $S_N \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds$.

6. Montrer que $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds \in]1, 2]$ et en déduire que S_N ne converge pas uniformément vers f_5 .

Exercice 6. Développer en série de Fourier la fonction définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = \frac{\sin(x)}{5-3\cos(x)}$.

Exercice 7. Développer en série de Fourier la fonction définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)}$, avec $a > 0$. En déduire $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)} dx$.

Exercice 8. Pour chaque fonction de l'exercice 2, donner le type de convergence de la série de Fourier associé puis montrer les égalités suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. & 2. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \\ 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 5. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Exercice 9. Déterminer les fonctions 2π périodiques et \mathcal{C}^∞ vérifiant la propriété suivante,

$$\exists a > 0, \exists M > 0 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M a^n.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. A l'aide de son développement en série de Fourier, montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

Exercice 11. Appliquer l'égalité de Parseval aux fonctions de l'exercice 2 pour en déduire la limite de séries numériques suivantes avec $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue et 2π -périodique telle que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$

Montrer que f est π -périodique.