

Feuille de TD 7  
Séries de Fourier

**Exercice 1.** Déterminer la périodicité et la parité des fonctions suivantes. Dessiner leurs graphes et calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes.

1.  $f_1(t) = |t|$  sur  $[-1, 1]$ , prolongée en une fonction 2-périodique.
2.  $f_2(t) = |\sin(t)|$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $f_3(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{sur } [0, \pi[, \\ (2\pi - t)(t - \pi) & \text{sur } [\pi, 2\pi[ \end{cases}$ , prolongée en une fonction  $2\pi$ -périodique.
4.  $f_4(t) = \frac{t}{T}$  sur  $[0, T[$ , prolongée en une fonction  $T$ -périodique,  $T > 0$ .
5.  $f_5(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, \pi[, \\ -1 & \text{sur } [\pi, 2\pi[ \end{cases}$ , prolongée en une fonction  $2\pi$ -périodique.
6.  $f_6(t) = e^{i\pi z t}$  sur  $[0, 2[$ , prolongée en une fonction 2-périodique, où  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Exercice 2.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique et Riemann-intégrable sur  $[0, T]$ . Pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ , on définit  $\check{f}(t) = f(-t)$ ,  $\tau_{t_0}f(t) = f(t - t_0)$  et  $f_a(t) = f(at)$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer alors les coefficients de Fourier  $c_n(\check{f})$ ,  $c_n(\tau_{t_0})$  et  $c_n(f_a)$  en fonction de ceux de  $f$ .
2. Si de plus la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^p$ , donner les coefficients de Fourier  $c_n(f^{(p)})$  en fonction de ceux de  $f$ .
3. Dédire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de  $|\cos(t)|$ .

**Exercice 3.** Soit  $f$  une fonction  $T$ -périodique et Riemann-intégrable sur  $[0, T]$ . Vérifier que  $f$  est aussi  $2T$ -périodique, Riemann-intégrable sur  $[0, 2T]$  et exprimer ses coefficients  $c'_n(f)$  associés à la période  $2T$ , en fonction des  $c_n(f)$ . En déduire que les développements en série de Fourier sont identiques.

**Exercice 4.** Calculer le développement en série de Fourier de la fonction  $f(t) = \sin^3(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 5.** On reprend la fonction  $f_5$  de l'exercice 2. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $S_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

1. Justifier que  $S_N$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que

$$S'_N(0) = 4(N+1)/\pi, \quad S'_N(\pi) = -4(N+1)/\pi,$$

et que

$$\forall x \in ]0, \pi[, \quad S'_N(x) = \frac{2 \sin(2(N+1)x)}{\pi \sin(x)}.$$

En déduire que  $S_N$  possède  $2N+1$  extremums entre  $]0, \pi[$ , que le premier et le dernier sont des maximums et que le premier est atteint en  $\pi/(2(N+1))$ .

2. Justifier que

$$S_N \left( \frac{\pi}{2(N+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin(2(N+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

3. On pose pour tout  $N \geq 1$   $u_N : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall s \in ]0, \pi], \quad u_N(s) = \frac{\sin(s)}{2(N+1) \sin\left(\frac{s}{2(N+1)}\right)},$$

et  $u_N(0) = 1$ . Etudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_N)_{N \geq 1}$  sur  $[0, \pi]$ .

4. Montrer par un développement de Taylor de la fonction sinus que, pour tout réel  $x$ ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \sin(x) \leq x + \frac{x^2}{2}$$

et en déduire que  $(u_N)_{N \geq 1}$  converge uniformément sur  $[0, \pi]$ .

5. Montrer à l'aide des questions précédentes que  $S_N \left( \frac{\pi}{2(N+1)} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds$ .

6. Montrer que  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds \in ]1, 2]$  et en déduire que  $S_N$  ne converge pas uniformément vers  $f_5$ .

**Exercice 6.** Développer en série de Fourier la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \frac{\sin(x)}{5-3\cos(x)}$ .

**Exercice 7.** Développer en série de Fourier la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)}$ , avec  $a > 0$ . En déduire  $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)} dx$ .

**Exercice 8.** Pour chaque fonction de l'exercice 2, donner le type de convergence de la série de Fourier associé puis montrer les égalités suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. & 2. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \\ 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 5. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. & 6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}. \end{array}$$

**Exercice 9.** Déterminer les fonctions  $2\pi$  périodiques et  $\mathcal{C}^\infty$  vérifiant la propriété suivante,

$$\exists a > 0, \exists M > 0 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M a^n.$$

**Exercice 10.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, définie par  $f(x) = \cos(\alpha x)$  pour  $x \in ]-\pi, \pi]$  où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . A l'aide de son développement en série de Fourier, montrer que pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}.$$

**Exercice 11.** Appliquer l'égalité de Parseval aux fonctions de l'exercice 2 pour en déduire la limite de séries numériques suivantes avec  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}; \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

**Exercice 12.** Soit  $f$  une fonction continue et  $2\pi$ -périodique telle que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$

Montrer que  $f$  est  $\pi$ -périodique.