M1 MEEF 2016-2017
Séquence 4

Correction du devoir Maison. APS Séquence 4.

Exercice 1. *Equations différentielles et séries de Fourier.*

1. Généralités

1. Par définition, $\mathscr{S}_{a,b}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
La fonction nulle est toujours une solution (deux fois dérivable) évidente de $(E_{a,b})$ (l'équation est homogène) et donc $\mathscr{S}_{a,b}$ est non vide.
Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\mathscr{S}_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$ et soit $(y_1,y_2)\in\mathscr{S}_{a,b}$. Puisque y_1 et y_2 sont solutions de $(E_{a,b})$:

$$y_1'' + \left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y_1 = 0$$
$$y_2'' + \left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y_2 = 0.$$

En combinant ces deux lignes ont obtient que

$$\lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + \left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0.$$

De plus l'opération de dérivation est linaire. Donc

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + \left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0,$$

c'est-à-dire que $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in \mathscr{S}_{a,b}$ et on conclut que $\mathscr{S}_{a,b}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2. Soit $y\in\mathscr{S}_{a,b}$, alors y et y' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$. Or y étant solution de $(E_{a,b})$, on sait que $y''(t) = -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. D'où

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R}, \qquad Y'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\times y(t) + 1\times y'(t) \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right)\times y(t) + 0\times y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De cette façon, on a montré que Y est donc une solution de (E) avec

$$\begin{aligned}
A : \qquad & \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\
& t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1}$$

3. On considère alors

$$\begin{aligned} \varphi : \qquad & \mathscr{S}_{a,b} \to \mathscr{S} \\ & y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est bien définie d'après la question précédente. Montrons que φ est linéaire. Soient λ_1, λ_2 deux complexes et y_1, y_2 deux solutions de $(E_{a,b})$. Alors (puisque la dérivation est linéaire)

$$\varphi(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} = \lambda_1 \varphi(y_1) + \lambda_2 \varphi(y_2).$$

Montrons maintenant que φ est injective. Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(E_{a,b})$ telles que $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. En prenant la première coordonnée des vecteurs $\varphi(y_1)$ et $\varphi(y_2)$ on obtient directement que $y_1 = y_2$ et donc φ est injective.

4. Montrons que φ est surjective. Soit $Y \in \mathscr{S}$. Notons y_1 et y_2 les deux coordonnées de Y. Puisque Y est solution de (E), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y_1(t) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La première ligne nous dit que $y_1' = y_2$ et donc on peut écrire $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$. De plus par définition de Y, on sait que y_2 est dérivable, donc $y_1' = y_2$ est aussi dérivable id est y_1 est deux fois dérivable. En dérivant la première ligne, on écrit que $y_1'' = y_2'$. En injectant la seconde ligne de (2) dans cette égalité on obtient que

$$y_1''(t) = -\left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y_1(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Finalement on a $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$ avec y_1 une solution de $(E_{a,b})$ donc $Y = \varphi(y_1)$ et on a montré que φ est surjective. On a au passage exprimé son application réciproque. Posons

$$\begin{aligned} \psi : \qquad & \mathscr{S} \to \mathscr{S}_{a,b} \\ & Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto y_1. \end{aligned}$$

Par ce qui précède on a vu que ψ est bien définie et on a vu que $\varphi(y_1) = Y$ c'est-à-dire que $\varphi(\psi(Y)) = Y$. De plus il est facile de voir que $\psi(\varphi(y)) = \psi\left(\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}\right) = y$. Conclusion ψ est bien l'application réciproque de φ.

5. On vérifie facilement que ϕ est une application linéaire. De plus l'équation $\phi(Y) = y_0$ avec $Y \in \mathscr{S}$ et $y_0 \in \mathbb{C}^2$ correspond à l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

qui est très exactement la formulation d'un problème de Cauchy linéaire (sans second membre). Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz cette équation admet une et une seule solution donc $\phi(Y) = y_0$ admet une et une seule solution c'est-à-dire ϕ est une fonction bijective. Puisque ϕ est aussi linéaire, ϕ est un isomorphisme.

6. Posons $\Phi = \phi \circ \varphi$ qui est une fonction de $\mathscr{S}_{a,b}$ dans $\mathbb{C}^2$. De plus par les questions précédentes on a vu que φ et ϕ sont des isomorphismes. Par conséquent $\Phi : \mathscr{S}_{a,b} \to \mathbb{C}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les espaces $\mathscr{S}_{a,b}$ et $\mathbb{C}^2$ sont isomorphes et par suite de même dimension. D'où $\mathscr{S}_{a,b}$ est un $\mathbb{C}^2$-espace vectoriel de dimension 2.

2. Etude de $\mathscr{S}_{a,0}$.

1. D'après (1), lorsque $b = 0$, on a une matrice constante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$
Son polynôme caractéristique est donné par
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & -X \end{vmatrix} = X^2 + a.$$
En écrivant $P_A(X) = 0$, on retrouve l'équation caractéristique de $(E_{a,0})$.

2. *Premier cas si $a < 0$,* alors P_A a deux racines réelles distinctes $\sqrt{-a}$ et $-\sqrt{-a}$ ce qui implique que $t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{-a}t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{-a}t}$ sont deux solutions de $(E_{a,0})$. Ces deux solutions ne sont pas colinéaires (regarder par exemple le comportement en l'infini qui est différent). Or d'après la question 6 de la partie 1, $\mathscr{S}_{a,0}$ est un espace vectoriel de dimension 2. Il est dans ce cas engendré par nos deux fonctions solutions :
$$\mathscr{S}_{a,0} = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-a}t} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{-a}t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
Deuxième cas si $a > 0$, alors P_A a toujours deux racines distinctes mais complexes cette fois-ci (et même imaginaires pures) $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$. On trouve à nouveau deux fonctions solutions distinctes de $(E_{a,0})$: $t \mapsto \mathrm{e}^{i\sqrt{a}t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-i\sqrt{a}t}$. D'où
$$\mathscr{S}_{a,0} = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{i\sqrt{a}t} + C_2 \mathrm{e}^{-i\sqrt{a}t},\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
En particulier on retrouve que si $C_1 = C_2 = 1/2$ alors $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$. De même si $C_1 = -i/2$ et $C_2 = i/2$ alors $t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)$. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes et donc forment également une base de solutions de $\mathscr{S}_{a,0}$:
$$\mathscr{S}_{a,0} = \left\{ t \mapsto C_1 \cos(\sqrt{a}t) + C_2 \sin(\sqrt{a}t),\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$
Remarque 1 : ici on cherchait les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Cette dernière étape est donc pour le fun. Cependant puisque a est réel, on pouvait demander l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cette dernière étape est dans ce cas indispensable pour trouver deux fonctions dans $\mathbb{R}$ solutions.
Remarque 2 : La deuxième expression de $\mathscr{S}_{a,0}$ en terme de cosinus et de sinus peut être directement redonnée comme un résultat bien connu avec des constantes réelles lorsque l'on travaille avec les solutions réelles.
Troisième cas si $a = 0$, cette fois-ci la racine 0 est double ce qui nous donne a priori une seule solution en exponentielle ($t \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{a}t} = 1$. Ou bien l'on connaît le résultat sur l'ensemble des solutions dans ce cas et on le donne directement. Ou bien on le retrouve grâce à la méthode de variation de la constante. Ici l'équation est très facile :
$$y'' = 0,$$
et l'on sait donc que
$$\mathscr{S}_{0,0} = \left\{ t \mapsto C_1 + C_2 t,\ (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

3. Si $a=0$, les fonctions constantes qui sont 2π-périodiques sont solutions. Lorsque $a<0$ il n'y a pas de solutions périodiques autre que la fonction nulle. Lorsque $a>0$ les solutions sont toutes périodiques de période $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}$. Donc lorsque $\sqrt{a}\in\mathbb{Z}^*$, $\mathscr{S}_{a,0}$ admet des solutions $2\pi-$périodiques.

3. Sur les séries de Fourier.

1. Puisque qu'une fonction de $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur tout compact notamment sur $[-\pi,\pi]$ et donc sa norme infini existe.
   Il est clair que $\|\cdot\|_\infty$ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $(f,g)\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})^2$, on a $|f(t)+g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ pour tout $t\in[-\pi,\pi]$. Et donc $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$, l'inégalité triangulaire est vérifiée.
   Soit $f\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ on a $|\lambda f(t)|=|\lambda|\,|f(t)|$, pour tout $t\in[-\pi,\pi]$. Donc la propriété d'homogénéité est vérifiée : $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\,\|f\|_\infty$.
   Enfin, si $\|f\|_\infty=0$ alors pour tout $t\in[-\pi,\pi]$ on a $|f(t)|=0$. Soit $x\in\mathbb{R}$, il existe $(k,t)\in\mathbb{Z}\times[-\pi,\pi]$ tel que $x=t+2\pi k$ (prendre pour k la partie entière de $\frac{x+\pi}{2\pi}$ et $t=\left(\frac{x+\pi}{2\pi}-k\right)2\pi-\pi$). Alors $f(x)=f(t)=0$ car f est 2π-périodique. Donc f est la fonction nulle et la propriété de séparabilité est vérifiée.

2. Soit $f\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$. Puisque la valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue,
$$\forall n\in\mathbb{Z},\qquad |c_n(f)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(t)\mathrm{e}^{-int}\right|\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
   Or pour tout $t\in[-\pi,\pi]$, $f(t)\leqslant\|f\|_\infty$ qui est une constante indépendante de t. Donc
$$|c_n(f)|\leqslant\|f\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,\mathrm{d}t=\|f\|_\infty.$$

3. Soit $g\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\in\mathbb{R}$. Puisque g est 2π-périodique, pour tout $h\in\mathbb{R}^*$,
$$\frac{g(x+2\pi+h)-g(x+2\pi)}{h}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$
   En passant à la limite sur h, puisque g est dérivable en x et en $x+2\pi$,
$$g'(x+2\pi)=g'(x).$$
   Cette égalité étant vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$, on en déduit que g' est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
   Soit maintenant $f\in\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$. Puisque f est 2π-périodique et dérivable, par ce qui précède avec $g=f$, on sait que f' est 2π-périodique. De plus f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc f' est une fonction de $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ dérivable. Donc en utilisant à nouveau ce qui précède avec $g=f'$ on en déduit que $g'=f''$ est 2π-périodique et puisque f est $\mathscr{C}^2$, on sait que f'' est continue. Finalement on a bien $f''\in\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$.

4. Soit $f\in\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$, par une intégration par parties, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned}c_n(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t&=\left[f(t)\mathrm{e}^{-int}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(-in)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\\&=(f(\pi)(-1)^n-f(-\pi)(-1)^n)+inc_n(f).\end{aligned}$$
   Puisque f est 2π-périodique, $f(\pi)=f(-\pi)$ et donc
$$\forall n\in\mathbb{Z},\qquad c_n(f')=inc_n(f).$$

5. La formule précédente est en réalité valide pour toute fonction $g \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{C})$. En l'appliquant à $g = f'$ (qui est bien dans $\mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{C})$ d'après la question 3) on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f'') = inc_n(f') = -n^2 c_n(f). \tag{3}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = -c_n(f'')/n^2$. De plus en utilisant la question 3, $f'' \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$. Donc par la question 1, on a $|c_n(f'')| \leqslant \|f''\|_\infty$. En couplant ces deux résultats, on obtient bien que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad |c_n(f)| = \frac{\|f''\|_\infty}{n^2}.$$

6. Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$. Par définition pour montrer la convergence normale, il faut montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|_\infty$ est une série numérique convergente. Or par la question précédente

$$0 \leqslant \|f_n\|_\infty = |c_n(f)| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{n^2}.$$

De plus on sait bien que la série de terme général $\frac{\|f''\|_\infty}{n^2}$ converge. Donc d'après un résultat sur les séries numériques à termes positifs on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|_\infty$ converge et donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ converge normalement.

4. Etude de $\mathscr{S}_{0,b}$.

1. Soit $y \in \mathscr{S}_{0,b}$. Par récurrence démontrons la propriété $\mathbf{P}(k)$: « la fonction y est k-fois dérivable ».
Initialisation. Pour $k = 2$, par définition même des solutions $\mathscr{S}_{0,b}$ on sait que y est deux fois dérivable, donc $\mathbf{P}(2)$ est vraie.
Hérédité. Supposons $\mathbf{P}(k)$ vraie pour un $k \geqslant 2$. Alors y est k-fois dérivable. Or, puisque y est solution de $(E_{0,b})$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y''(t) = -b\mathrm{e}^{2it}y(t).$$

La fonction exponentielle étant infiniment dérivable, on en déduit que y'' est le produit de deux fonctions k-fois dérivables et est donc également k-fois dérivable. D'où y est $(k+2)$-fois dérivable, notamment $\mathbf{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion $\mathbf{P}(k)$ est vraie pour tout $k \geqslant 2$ et donc y est infiniment dérivable. Notamment toute fonction de $\mathscr{S}_{0,b}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et si elle est de plus 2π-périodique, elle appartient à $\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$.

2. Soit $f \in \mathscr{S}_{0,b} \cap \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$. Par linéarité de l'intégrale, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f''(t) + b\mathrm{e}^{2it}f(t)\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\mathrm{e}^{2it}f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= c_n(f'') + b\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-i(n-2)t}\,\mathrm{d}t \\ &= c_n(f'') + bc_{n-2}(f). \end{aligned}$$

Donc par (3), on trouve que

$$0 = -n^2 c_n(f) + bc_{n-2}(f), \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad c_n(f) = \frac{b}{n^2}c_{n-2}(f). \tag{5}$$

3. Démontrons les quatre formules par récurrence. Commençons par les deux premières.
Initialisation. Lorsque $p = 0$, on a $c_{2p}(f) = c_0(f) = \frac{b^0}{4^0 (0!)^2} c_0(f)$ et $c_{2p+1}(f) = c_1(f) = \frac{b^0}{1^2} c_1(f)$.
Hérédité. Supposons qu'il existe $p \geqslant 0$ tel que

$$c_{2p}(f) = \frac{b^p}{4^p \,(p!)^2} c_0(f), \qquad c_{2p+1}(f) = \frac{b^p}{(2p+1)^2 (2p-1)^2 \dots 3^2} c_1(f).$$

Alors, en utilisant (5), (puisque $2p + 2 \neq 0$ et $2p + 3 \neq 0$),

$$c_{2p+2}(f) = \frac{b}{(2p+2)^2} c_{2p}(f) = \frac{b}{4(p+1)^2} c_{2p}(f) \qquad \text{et} \qquad c_{2p+3}(f) = \frac{b}{(2p+3)^2} c_{2p+1}(f),$$

et par l'hypothèse de récurrence,

$$c_{2p+2}(f) = \frac{b}{4(p+1)^2} \frac{b^p}{4^p \,(p!)^2} c_0(f) = \frac{b^{p+1}}{4^{p+1} \,((p+1)!)^2} c_0(f)$$
$$c_{2p+3}(f) = \frac{b}{(2p+3)^2} \frac{b^p}{(2p+1)^2 (2p-1)^2 \dots 3^2} c_1(f) = \frac{b^{p+1}}{(2p+3)^2 (2p+1)^2 (2p-1)^2 \dots 3^2} c_1(f).$$

Les formules sont donc vraies au rang $p + 1$.
Donc par récurrence,

$$\forall p \geqslant 0, \qquad c_{2p}(f) = \frac{b^p}{4^p \,(p!)^2} c_0(f), \qquad c_{2p+1}(f) = \frac{b^p}{(2p+1)^2 (2p-1)^2 \dots 3^2} c_1(f).$$

De la même façon, montrons les deux formules restantes.
Initialisation. Lorsque $p = 1$, en utilisant (4) avec $n = 0$, on a $0 = bc_{-2}(f)$. Notons que si $b = 0$ alors $(E_{0,0})$ devient $f'' = 0$ et donc f est affine et par hypothèse 2π-périodique. Dans ce cas $f = f(0)$ est une fonction constante. Il est assez facile de voir que dans ce cas

$$c_n(f) = f(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-int} \, \mathrm{d}t$$

et donc $c_0(f) = f(0)$ et $\forall n \neq 0$, $c_n(f) = 0$.
Supposons désormais que $b \neq 0$. Alors $c_{-2}(f) = 0$. De plus par (4) on a également

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad c_n = \frac{(n+2)^2}{b} c_{n+2}(f). \tag{6}$$

Notamment en appliquant cette équation lorsque $n = -3 = -(2p+1)$ puis $n = -1$, $c_{-(2p+1)}(f) = c_{-3}(f) = \frac{1}{b} c_{-1}(f) = \frac{1}{b^2} c_1(f) = \frac{1}{b^{p+1}} c_1(f)$.
Hérédité. Supposons qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que

$$c_{-2p}(f) = 0, \qquad c_{-(2p+1)}(f) = \frac{(2p-1)^2 (2p-3)^2 \dots 3^2}{b^{p+1}} c_1(f).$$

Alors, en utilisant (6),

$$c_{-(2p+2)}(f) = \frac{(-2p-2+2)^2}{b} c_{-2p}(f) = \frac{(2p)^2}{b} c_{-2p}(f) = \frac{4p^2}{b} c_{-2p}(f)$$
$$\text{et} \qquad c_{-(2p+3)}(f) = \frac{(-2p-3+2)^2}{b} c_{2p+1}(f) = \frac{(-2p-1)^2}{b} c_{2p+1}(f) = \frac{(2p+1)^2}{b} c_{2p+1}(f),$$

et par l'hypothèse de récurrence,

$$c_{-(2p+2)}(f) = \frac{4p^2}{b} \times 0 = 0$$
$$c_{-(2p+3)}(f) = \frac{(2p+1)^2}{b} \frac{(2p-1)^2(2p-3)^2 \dots 3^2}{b^{p+1}} c_1(f) = \frac{(2p+1)^2(2p-1)^2 \dots 3^2}{b^{p+2}} c_1(f).$$

Donc encore une fois, les formules sont vraies au rang $p+1$.
Ainsi, par récurrence,

$$\forall p \geqslant 1, \qquad c_{-2p}(f) = 0, \qquad c_{-(2p+1)}(f) = \frac{(2p-1)^2(2p-3)^2 \dots 3^2}{b^{p+1}} c_1(f).$$

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2ina_n = \frac{2inb^n}{4^n(n!)^2}$ et $d_n = 2inb_n = -4n^2 a_n = -\frac{4n^2 b^n}{4^n(n!)^2}$. Si $b = 0$, on voit directement que les séries $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ et $\sum_n d_n$ converge absolument. Supposons $b \neq 0$. On écrit d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_n| \leqslant |b_n| \leqslant |d_n|.$$

Il nous suffit donc simplement de montrer que $\sum_n |d_n|$ converge pour déduire que les trois séries convergent absolument. Vérifions le critère de d'Alembert. Soit $n \geqslant 1$, $(b \neq 0)$

$$\frac{|d_{n+1}|}{|d_n|} = \frac{4(n+1)^2 \frac{b^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)!)}}{4n^2 \frac{b^n}{4^n(n!)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{b}{4(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum_n |d_n|$ converge et donc $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ également. Posons pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = a_n \mathrm{e}^{2itn}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est deux fois dérivable. De plus pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n'(t) = b_n \mathrm{e}^{2itn}$ et $g_n''(t) = d_n \mathrm{e}^{2itn}$. Donc, $\|g_n\|_\infty = |a_n|$, $\|g_n'\|_\infty = |b_n|$ et $\|g_n''\|_\infty = |d_n|$. Ainsi par ce qui précède on en déduit que $\sum_n g_n$, $\sum_n g_n'$ et $\sum_n g_n''$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, (qui ne nécessite que la convergence simple pour g_n et g_n' ce qui est moins fort que la convergence normale précédemment évoquée) on en déduit que la fonction y_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2ina_n \mathrm{e}^{2int} \qquad \text{et} \qquad y_1''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} -4n^2 a_n \mathrm{e}^{2int}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_1''(t) + b\mathrm{e}^{2it} y_1(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} -4n^2 a_n \mathrm{e}^{2int} + b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{2i(n+1)t} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} -4n^2 a_n \mathrm{e}^{2int} + b \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \mathrm{e}^{2int} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(ba_{n-1} - 4n^2 a_n\right) \mathrm{e}^{2int}. \end{aligned}$$

Or pour tout $n \geqslant 1$,

$$ba_{n-1} - 4n^2 a_n = b \frac{b^{n-1}}{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2} - 4n^2 \frac{b^n}{4^n (n!)^2} = \frac{b^n}{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2} - \frac{b^n}{4^{n-1}\left((n-1)!\right)^2} = 0.$$

Donc finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y_1''(t) + b\mathrm{e}^{2it} y_1(t) = 0$$

et y_1 est bien une solution de $(E_{0,b})$.

Exercice 2. *Espaces vectoriels normés.*

1. On commence à en avoir l'habitude. Soit $f \in E$. Puisque $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, les fonctions f, f' et f'' sont continues sur $[0,1]$, donc $f''+2f'+f$ également et l'ensemble $[0,1]$ est compact. La fonction $f''+2f'+f$ est donc bornée sur cet intervalle et donc sa norme infini existe.

2. Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ il est facile de voir que E est un espace vectoriel (et même un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$), notamment $\lambda f \in E$. De plus

$$N(\lambda f) = \|(\lambda f)'' + 2(\lambda f)' + \lambda f\|_\infty = \|\lambda f'' + \lambda f' + \lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f'' + f' + f\|_\infty = |\lambda| \, N(f).$$

Soient $(f,g) \in E$ alors $f+g \in E$. De plus

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \|(f+g)'' + 2(f+g)' + f + g\|_\infty \\ &= \|f'' + 2f' + f + g'' + 2g' + g\|_\infty \\ &\leqslant \|f'' + f' + f\|_\infty + \|g'' + g' + g\|_\infty \end{aligned}$$

car $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Donc $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.

Enfin, et c'est la partie intéressante de la question, si $N(f) = 0$ pour $f \in E$ alors pour tout $x \in [0,1]$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0.$$

Or $f'(0) = f(0) = 0$ (car $f \in E$). Donc f est une solution d'un problème de Cauchy. Ici les coefficients de l'équation différentielle sont constants donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution à ce problème. De plus la fonction nulle sur $[0,1]$ est une solution triviale du même problème de Cauchy. Donc par unicité, $f = 0$ sur $[0,1]$.

3. Soit $g \in F$, par un théorème bien connu puisque $x \mapsto g(x)\mathrm{e}^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad g(x)\mathrm{e}^x = g(0) + \int_0^x \left(g'(t)\mathrm{e}^t + g(t)\mathrm{e}^t\right) \mathrm{d}t.$$

Comme $g(0) = 0$, on conclut que

$$\forall x \in [0,1], \qquad g(x)\mathrm{e}^x = \int_0^x \left(g'(t) + g(t)\right) \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

4. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \qquad |g(x)| &= \mathrm{e}^{-x} \left| \int_0^x \left(g'(t) + g(t)\right) \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^x \left(g'(t) + g(t)\right) \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \int_0^x |g'(t) + g(t)| \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x \|g' + g\|_\infty \, \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \\ &= \|g' + g\|_\infty \left(\mathrm{e}^x - 1\right) \\ &\leqslant \|g' + g\|_\infty \, \mathrm{e}^1. \end{aligned}$$

Le majorant est indépendant de x, donc en prenant la borne supérieure :

$$\|g\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^1 \, \|g' + g\|_\infty .$$

Notez qu'en gardant e^{-x}, on pouvait faire mieux :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \qquad |g(x)| &= \mathrm{e}^{-x}\left|\int_0^x (g'(t)+g(t))\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^x |g'(t)+g(t)|\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \|g'+g\|_\infty\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \|g'+g\|_\infty\,\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1) \\ &= \|g'+g\|_\infty(1-\mathrm{e}^{-x}) \leqslant \|g'+g\|_\infty .\end{aligned}$$

5. Soit $f \in E$ alors f est de classe $\mathscr{C}^2$ donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ de plus $f(0)=0$ donc $f \in F$. De plus f' est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ donc $g = f'+f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et l'on a $g(0) = f'(0)+f(0) = 0+0 = 0$, donc $g \in F$.

6. Soit $f \in E$. D'après la question précédente $f \in F$ donc d'après la question 4,

$$\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^1\,\|f'+f\|_\infty = \mathrm{e}^1\,\|g\|_\infty .$$

Or d'après la question 5, $g \in F$. Donc par la question 4,

$$\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^1\mathrm{e}^1\,\|g'+g\|_\infty = \mathrm{e}^2\left\|(f'+f)'+f'+f\right\|_\infty = \mathrm{e}^2\,\|f''+2f'+f\|_\infty = \mathrm{e}^2 N(f).$$

7. Si $n=0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 1$ notamment $f_n(0) = 1 \neq 0$. Si $n=1$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = x$ et donc $f_n'(x) = 1 = f_n'(0) \neq 0$. Soit $n \geqslant 2$, alors $f_n(0) = 0^n = 0$ et $f_n'(0) = n \times 0^{n-1} = 0$. Précisons que pour tout $n \geqslant 0$, $f_n \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Donc $f_n \in E$ si et seulement si $n \geqslant 2$.

8. On procède par l'absurde. Supposons que $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur E. Alors il existe $c > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \qquad N(f) \leqslant c\,\|f\|_\infty .$$

Notamment, pour tout $n \geqslant 2$,

$$N(f_n) \leqslant c\,\|f_n\|_\infty . \tag{7}$$

Or pour tout $x \in [0,1]$, $f_n''(x) + 2f_n'(x) + f_n(x) = n(n-1)x^{n-2} + 2nx^{n-1} + x^n$. Donc

$$N(f_n) = n(n-1) + 2n + 1.$$

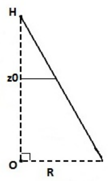
(pour les moins convaincus : dériver une fois $f_n'' + 2f_n + f_n$, voir que la dérivée est toujours positive pour tout $x \geqslant 0$ et donc la fonction est croissante et atteint son maximum en $x=1$). Donc, par (7), pour tout $n \geqslant 2$,

$$n(n-1) + 2n + 1 \leqslant c.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient la contradiction $+\infty \leqslant c$. Donc les deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 3. *Calcul différentiel.*

1. Calcul du volume du cône.



1. On commence par un petit coup de Thalès. Soit $r(z_0)$ le rayon du disque engendré par la coupe du cône par le plan $\mathscr{P} = \{(x, y, z)\,;\, z = z_0\}$ qui est parallèle à la base du cône. Par le théorème de Thalès, $\frac{H-z_0}{H} = \frac{r(z_0)}{R}$ et donc
$$r(z_0) = R\frac{H - z_0}{H}.$$

2. D'après la question précédente,
$$\mathscr{C} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leqslant z \leqslant H,\, 0 \leqslant r \leqslant R\frac{H - z}{H},\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}.$$
Naturellement pour θ on peut choisir n'importe quel intervalle de longueur 2π.

3. Pour tout $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$, on définit $\varphi_1(r, \theta, z) = r\cos(\theta)$, $\varphi_2(r, \theta, z) = r\sin(\theta)$, et $\varphi_3(r, \theta, z) = z$. On sait que ces fonctions sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ (produit de polynômes avec des fonctions trigonométrique). Donc la fonction $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ et
$$\begin{aligned}\forall (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad J_\varphi(r, \theta, z) &= \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(r, \theta, z) & \partial_2\varphi_1(r, \theta, z) & \partial_3\varphi_1(r, \theta, z) \\ \partial_1\varphi_2(r, \theta, z) & \partial_2\varphi_2(r, \theta, z) & \partial_3\varphi_2(r, \theta, z) \\ \partial_1\varphi_3(r, \theta, z) & \partial_2\varphi_3(r, \theta, z) & \partial_3\varphi_3(r, \theta, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$
Ainsi pour tout $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,
$$d_{(r,\theta,z)}\varphi(h_1, h_2, h_3) = J_\varphi(r, \theta, z)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)h_1 - r\sin(\theta)h_2 \\ \sin(\theta)h_1 + r\cos(\theta)h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

4. Pour tout $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\det\left(J_\varphi(r, \theta, z)\right) = 1 \times \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$
Donc par la formule de changement de variables : $\mathscr{V} = \iiint_{\mathscr{C}} |r| \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. Ainsi d'après la question 2,
$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R\frac{H-z}{H}}\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_{z=0}^{H}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R\frac{H-z}{H}}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\frac{R^2}{2H^2}\int_{z=0}^{H}(H-z)^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{-(H-z)^3}{3}\right]_{z=0}^{z=H} = \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.\end{aligned}$$

2. Estimation de l'erreur.

1. La fonction V est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$
$$d_{(x,y)}V(h,k) = \partial_1 V(x,y)h + \partial_2 V(x,y)k = \frac{2\pi}{3}xyh + \frac{\pi}{3}x^2k.$$

2. Notons, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $V_1(x,y) = \partial_1 V(x,y) = \frac{2\pi}{3}xy$ et $V_2(x,y) = \partial_2 V(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2$. Par définition, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$H_V(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 V_1(x,y) & \partial_1 V_2(x,y) \\ \partial_2 V_1(x,y) & \partial_2 V_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{3}\begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la formule de Taylor-Lagrange et des questions précédentes, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x-u| \leqslant |h|$ et $|y-v| \leqslant |k|$ et
$$\begin{aligned} V(x+h,y+k) - V(x,y) &= \frac{2\pi}{3}xyh + \frac{\pi}{3}x^2k + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \frac{2\pi}{3}\begin{pmatrix} v & u \\ u & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \frac{\pi}{3}\left(2xyh + x^2k + 2\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} vh+uk \\ uh \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(2xyh + x^2k + 2vh^2 + 2uhk + 2uhk\right) \end{aligned}$$
Donc
$$|V(x+h,y+k) - V(x,y)| = \frac{\pi}{3}\left(2\,|xyh| + \left|x^2k\right| + 2h^2\,|v| + 4\,|uhk|\right).$$
Or par définition de u et de v : $|u| \leqslant |x| + |h|$ et $|v| \leqslant |y| + |k|$. D'où finalement,
$$|V(x+h,y+k) - V(x,y)| = \frac{\pi}{3}\left(2\,|xyh| + \left|x^2k\right| + 2h^2\,(|y|+|k|) + 4\,|hk|\,(|x|+|h|)\right).$$
NB : il manquait une valeur absolue autour du dernier k dans l'énoncé.

4. D'après la partie 1, on sait que $\mathscr{V} = \frac{\pi R^2 H}{3} = V(R,H)$. Donc en prenant $x = R = 0.1$, $y = H = 1$, $h = \pm 1.10^{-3}$ et $k = \pm 1.10^{-2}$ dans la formule précédente, on obtient l'estimation suivante :
$$\begin{aligned} \Delta V &\leqslant \frac{\pi}{3}\left(2.10^{-4} + 10^{-4} + 2.10^{-6}\left(1 + 1.10^{-2}\right) + 4.10^{-5}\left(1.10^{-1} + 1.10^{-3}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\left(3.10^{-4} + 2.10^{-6} + 2.10^{-8} + 4.10^{-6} + 4.10^{-8}\right) \\ &\leqslant \frac{\pi}{3}\left(3.10^{-4} + 6.10^{-6} + 6.10^{-8}\right) \\ &= \pi\left(1.10^{-4} + 2.10^{-6} + 2.10^{-8}\right) = \pi \times 1.0202.10^{-4} \leqslant 4.10^{-4}. \end{aligned}$$
Finalement, le volume du chapeau mesure
$$V(x,y) = \frac{\pi}{3}.10^{-2} \pm 4.10^{-4} = 0,0105 \pm 4.10^{-4}m^3.$$

Exercice 4. *Statistique.*

1. On suppose que les réponses des sondés suivent la même loi aléatoire (Bernoulli de même paramètre inconnu p) et sont indépendantes. Dans ce cas X_n est le nombre de « succès » parmi n tirages indépendants et identiquement distribués ou encore la somme de n Bernoulli de même paramètre et indépendantes. Donc la loi de X_n est une binomiale de paramètre n et p :
$$X_n \sim \mathscr{B}(n,p).$$
Notamment $\mathbb{E}\left(X_n\right) = np$ et $\operatorname{Var}(X_n) = np(1-p)$.

2. D'après la loi des grands nombres, on sait que $\frac{X_n}{n}$ converge presque sûrement vers p quand n tend vers $+\infty$ car p est la moyenne de $\frac{X_n}{n}$. La probabilité $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| > x_\alpha\right)$ correspond à la probabilité que $\frac{X_n}{n}$ dévie de sa moyenne, probabilité qui tend donc vers 0 quand n tend vers 0. Plus concrètement, puisque $\frac{X_n}{n}$ correspond à la valeur mesurée pendant notre sondage et puisque p est la valeur théorique recherchée, la probabilité $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| > x_\alpha\right)$ correspond à la probabilité de commettre une erreur en supposant p dans l'intervalle $\left[\frac{X_n}{n}-x_\alpha ; \frac{X_n}{n}+x_\alpha\right]$.

3. Par le théorème central limite, la somme de « succès » X_n centrée et renormalisée converge en loi à vitesse $\sqrt{n}$ vers une loi normale :
$$\sqrt{n}\frac{X_n-np}{n\sqrt{p(1-p)}} = \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} \mathscr{N}(0,1),$$
où $\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}$ signifie que la variable aléatoire converge en loi et $\mathscr{N}(0,1)$ est la loi normale de moyenne 0 et de variance 1.

4. Posons $f : p \mapsto p(1-p)$ définie et dérivable sur $[0,1]$. Puisque $\forall p \in [0,1]$, $f'(p) = 1-2p$ est positive si et seulement si $p \in [0,1/2]$ on en déduit que f est croissante sur $[0,1/2]$ et décroissante sur $[1/2,1]$ et donc majorée sur $[0,1]$ par $f(1/2) = 1/4$. Ainsi :
$$\forall p \in [0,1], \qquad p(1-p) \leqslant 1/4.$$

5. On écrit tout d'abord que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| > x_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{|X_n-np|}{n\sqrt{p(1-p)}} > \frac{\sqrt{n}x_\alpha}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$
Par le théorème central limite on se permet d'approcher $\sqrt{n}\frac{|X_n-np|}{n\sqrt{p(1-p)}}$ par une gaussienne $N \sim \mathscr{N}(0,1)$ en négligeant l'erreur commise. Sous cette hypothèse,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| > x_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(|N| > \frac{\sqrt{n}x_\alpha}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$
Le paramètre p étant inconnu, on utilise la majoration de la question 4 pour le faire disparaître de l'équation. D'après la question 4, $\frac{\sqrt{n}x_\alpha}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant 2\sqrt{n}x_\alpha$. De cette façon, l'évènement $\left\{|N| > \frac{\sqrt{n}x_\alpha}{\sqrt{p(1-p)}}\right\}$ est inclus dans l'évènement $\{|N| > 2\sqrt{n}x_\alpha\}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| > x_\alpha\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|N| > 2\sqrt{n}x_\alpha\right).$$

Or la loi gaussienne est symétrique par rapport à sa moyenne donc $\mathbb{P}\left(|N| > 2\sqrt{n}x_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_\alpha\right) + \mathbb{P}\left(N < -2\sqrt{n}x_\alpha\right) = 2\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_\alpha\right)$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_\alpha\right) \leqslant 2\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_\alpha\right).$$

Donc il suffit d'avoir $2\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_\alpha\right) \leqslant 0.1$ pour assurer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_\alpha\right) \leqslant 0.1$, c'est-à-dire que l'on cherche $x_{0.1}$ tel que

$$\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_{0.1}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N \leqslant 2\sqrt{n}x_{0.1}\right) \leqslant 0.05$$

ou encore tel que

$$\mathbb{P}\left(N \leqslant 2\sqrt{n}x_{0.1}\right) \geqslant 0.95.$$

Il nous faut donc prendre $2\sqrt{n}x_{0.1} \geqslant 1.64$ mais comme on nous demande $x_{0.1}$ assez petit (pour avoir l'intervalle le plus fin possible), on prend donc

$$x_{0.1} = \frac{1.64}{2\sqrt{n}} = \frac{0.82}{\sqrt{10000}} = 0.0082.$$

6. L'intervalle de confiance à 95% qui en découle est donc

$$p \in \left[\frac{X_n}{n} - x_{0.1},\ \frac{X_n}{n} + x_{0.1}\right] = \left[\frac{X_n}{n} - 0.0082,\ \frac{X_n}{n} + 0.0082\right].$$

Donc lorsque $X_n = 5097$, on a

$$p \in [0.5015,\ 0.5179].$$

En particulier, $p \geqslant 0.5$ et donc une majorité de personnes votera « oui » au référendum et le dahu sera protégé avec une certitude de 90%.

7. On reprend les calculs précédents et on remarque que pour que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.01}\right) \leqslant 0.01$, il suffit que $2\mathbb{P}\left(N > 2\sqrt{n}x_{0.01}\right) \leqslant 0.01$, c'est-à-dire d'avoir

$$\mathbb{P}\left(N \leqslant 2\sqrt{n}x_{0.01}\right) \geqslant 1 - \frac{0.01}{2} = 0.995.$$

On pose donc

$$x_{0.01} = \frac{2.57}{2\sqrt{n}} = \frac{1.285}{\sqrt{10000}} = 0.01285$$

et l'intervalle devient donc

$$p \in [0.50970 - 0.01285,\ 50970 + 0.01285] = [0.49685,\ 0.52255].$$

Cette fois-ci 0.5 fait partie de l'intervalle donc on ne peut ni conclure que le résultat sera « oui » majoritairement ni « non » pour une précision de 99%.