M1 MEEF 2016-2017
Séquence 4

Devoir Maison. APS Séquence 4.
A rendre pour le 6 Janvier 2017.

Le barème sur 86 (dont 6 points bonus) est donné à titre indicatif. Une rédaction claire est exigée. Les exercices sont indépendants. Bon courage !

Exercice 1. *Equations différentielles et séries de Fourier (41 points).*
On note $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ deux fois dérivables. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ deux réels, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(E_{a,b}) \qquad y'' + \left(a + b\mathrm{e}^{2it}\right) y = 0,$$

d'inconnue une fonction y une fonction de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note $\mathscr{S}_{a,b}$ l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$.

1. Généralités

1. *(1 pt)* Montrer que $\mathscr{S}_{a,b}$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. *(1 pt)* Montrer que si y est une solution de $(E_{a,b})$, alors la fonction

$$Y : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \end{array}$$

   est une solution d'un système

$$(E) \qquad Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

   où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une fonction à déterminer. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E).
3. *(2 pts)* Construire par la question précédente une application linéaire φ entre $\mathscr{S}_{a,b}$ et $\mathscr{S}$ et montrer que cette application est injective.
4. *(3 pts)* Montrer que φ est surjective et construire son application réciproque ψ.
5. *(2 pts)* On considère

$$\begin{array}{l} \phi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}^2 \\ \quad Y \mapsto Y(0). \end{array}$$

   Justifier que ϕ est un isomorphisme.
6. *(2 pts)* En déduire la dimension de $\mathscr{S}_{a,b}$.

2. Etude de $\mathscr{S}_{a,0}$.

On suppose dans cette partie que $b = 0$.

1. *(2 pts)* Réécrire A et calculer son polynôme caractéristique. Quelle équation retrouve-t-on ?
2. *(5 pts)* Suivant les valeurs de a, déterminer $\mathscr{S}_{a,0}$.

3. *(1 pt)* Pour quelle(s) valeur(s) de a, $\mathscr{S}_{a,0}$ admet-elle des solutions 2π-périodiques autre que la fonction nulle ?

3. Sur les séries de Fourier.

1. *(2 pts)* On note $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|$. Justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie sur $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ et montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$.

2. *(1 pt)* Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$ on définit le n-ième coefficient de Fourier par :
$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$|c_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty .$$

3. *(2 pts)* On note $\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ qui sont de classe $\mathscr{C}^2$. Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$, montrer que f' est aussi 2π-périodique puis également que $f'' \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$.

4. *(2 pts)* Pour $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.

5. *(3 pts)* Pour $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \qquad |c_n(f)| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{n^2}.$$

6. *(2 pts)* Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $f \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ on pose $f_n \in \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(t) = c_n(f)\mathrm{e}^{int}.$$
Déduire de la question précédente que si $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ est une série de fonctions qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. On l'appelle la série de Fourier de f.

4. Etude de $\mathscr{S}_{0,b}$.

On suppose dans cette partie que $a = 0$ et $b \neq 0$.

1. *(2 pts)* Montrer que toute solution $y \in \mathscr{S}_{0,b}$ est une fonction infiniment dérivable et en déduire que $\mathscr{S}_{0,b} \cap \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C}) \subset \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{C})$.

2. *(2 pts)* Soit $f \in \mathscr{S}_{0,b} \cap \mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{C})$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad n^2 c_n(f) = b c_{n-2}(f).$$

3. *(2 pts)* Montrer alors que
$$\begin{array}{llll} \forall p \geqslant 0, & c_{2p}(f) = \frac{b^p}{4^p (p!)^2} c_0(f), & & c_{2p+1}(f) = \frac{b^p}{(2p+1)^2(2p-1)^2\ldots 3^2} c_1(f), \\ \forall p \geqslant 1, & c_{-2p}(f) = 0, & & c_{-(2p+1)}(f) = \frac{(2p-1)^2(2p-3)^2\ldots 3^2}{b^{p+1}} c_1(f). \end{array}$$

4. *(4 pts)* Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $a_n = \frac{b^n}{4^n (n!)^2}$. Montrer que les séries $\sum_n a_n$, $\sum_n 2ina_n$ et $\sum_n -4n^2 a_n$ convergent absolument. En déduire que la fonction $y_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{2itn}$ est deux fois dérivable et montrer que y_1 est une solution de $(E_{0,b})$.

Exercice 2. *Espaces vectoriels normés (15 points).*
On désigne par $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (respectivement $\mathscr{C}^2$) sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

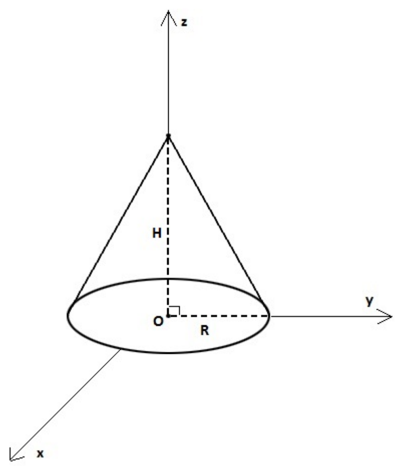
$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})\ ;\ f(0) = f'(0) = 0 \right\}$$

et on définit pour tout $f \in E$,

$$N(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| f''(x) + 2f'(x) + f(x) \right|.$$

1. *(1 pt)* Justifier que N est bien définie sur E.
2. *(3 pts)* Montrer que N est une norme sur E.
3. *(2 pts)* Soit $F = \left\{ g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\ ;\ g(0) = 0 \right\}$. Montrer que pour toute fonction $g \in F$, et tout $x \in [0,1]$,
$$g(x)\mathrm{e}^x = \int_0^x \left(g'(t) + g(t)\right) \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$
4. *(2 pts)* En déduire que pour tout $g \in F$,
$$\|g\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^1 \|g' + g\|_\infty$$
5. *(1 pt)* Vérifier que pour toute fonction $f \in E$, on a $f \in F$ et $g = f' + f \in F$.
6. *(2 pts)* Déduire des deux questions précédentes que pour toute fonction $f \in E$,
$$\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^2 N(f).$$
7. *(1 pt)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n par $f_n(x) = x^n$, pour tout $x \in [0,1]$. Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $f_n \in E$?
8. *(3 pts)* Montrer que $\|.\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 3. *Calcul différentiel (15 points).*
Nous sommes mandatés par le lutin du Père Noël pour calculer précisément le volume de son beau chapeau. On considère donc un cône dans un repère de $\mathbb{R}^3$ dont l'origine O est fixé au centre du disque formant la base du cône. On considère que la base est dans le plan xOy et que le cône est de révolution autour de l'axe Oz. On note H la hauteur du cône et R le rayon du disque de base.



1. Calcul du volume du cône.

1. *(2 pts)* Soit $z_0 \in [0, H]$. Calculer le rayon du disque engendré par la coupe du cône par le plan $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \,;\, z = z_0\}$.

2. *(2 pts)* On se munit des coordonnées cylindriques. On pose

$$(x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z).$$

Ecrire le domaine de l'espace $\mathbb{R}^3$ délimité par le cône dans ces coordonnées :

$$\mathscr{C} = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, \dots\right\}.$$

3. *(3 pts)* Montrer que l'application φ est différentiable sur $\mathbb{R}^3$, calculer sa Jacobienne, notée J_φ et en déduire sa différentielle.

4. *(2 pts)* On note $\mathscr{C}'$ le domaine de $\mathbb{R}^3$ délimité par le cône dans les coordonnées cartésiennes. Un point $M = (x, y, z)$ est dans $\mathscr{C}'$ si et seulement si M est à l'intérieur du cône. On admet la formule de changement de base suivante :

$$\mathscr{V} = \iiint_{\mathscr{C}'} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\mathscr{C}} |\det\,(J_\varphi(r, \theta, z))|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

Déduire des questions précédentes le volume $\mathscr{V}$ du cône.

2. Estimation de l'erreur.

Les mesures du rayon R et de la hauteur H nous sont données avec leurs incertitudes associées. Le but de cette partie est de donner une bonne majoration de l'erreur que l'on commettra dans le calcul du volume $\mathscr{V}$. On pose V la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\pi}{3}x^2 y. \end{aligned}$$

1. *(2 pts)* Justifier que V est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle $d_{(x,y)}V(h, k)$.

2. *(1 pt)* Calculer la Hessienne de V en (x, y), notée $H_V(x, y)$.

3. *(2 pts)* On rappelle/admet la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|u - x| \leqslant |h|$, $|v - y| \leqslant |k|$ et

$$V(x + h, y + k) = V(x, y) + d_{(x,y)}V(h, k) + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_V(u, v) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

En déduire que

$$|V(x + h, y + k) - V(x, y)| \leqslant \frac{\pi}{3}\left(2\,|xyh| + \left|x^2 k\right| + 2h^2\,(|y| + |k|) + 4\,|h|\,k\,(|x| + |h|)\right).$$

4. *(1 pt)* Le lutin nous donne pour dimensions $R = 0.1 \pm 1.10^{-3}$ et $H = 1 \pm 1.10^{-2}$. Calculer le volume de son chapeau avec une majoration de l'erreur associée.

Exercice 4. *Statistique (15 points).*
On désire prédire l'issue d'un référendum sur la mise en place d'une réglementation pour protéger le dahu de la chasse. On note p la proportion inconnue de personnes qui voteront oui à cette réforme. On tire au hasard n personnes parmi la population française totale et on note X_n le nombre de personnes qui affirment vouloir voter oui.

1. *(3 pts)* Sous de bonnes hypothèses sur le tirage des personnes, que l'on précisera, quelle est la loi de X_n en fonction de p et de n ? Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

2. *(2 pts)* A quoi correspond la probabilité suivante,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_\alpha\right) \ ?$$

3. *(2 pts)* Énoncer le théorème central limite vérifié par X_n.

4. *(1 pt)* Pour tout $p \in [0,1]$, majorer $p(1-p)$ par une constante numérique.

5. *(3 pts)* On suppose l'étude faite sur $n = 10000$ personnes. En approchant X_n par la question 3 et sachant que pour $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ une gaussienne centrée réduite on a $\mathbb{P}(N \leqslant 1.64) = 0.95$, déterminer $x_{0.1}$ petit mais tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.1}\right) \leqslant 0.1$.

6. *(2 pts)* Sachant que $X_n = 5097$ personnes affirment vouloir voter oui, peut-on affirmer que le dahu sera protégé ? Avec quel indice de confiance ?

7. *(2 pts)* De même déterminer $x_{0.01}$ petit mais tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > x_{0.01}\right) \leqslant 0.01$ sachant que $\mathbb{P}(N \leqslant 2.57) = 0.995$. Peut-on affirmer que le dahut sera protégé ? Avec quel indice de confiance ?