

Feuille 1. Les équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 2y = 4x^2$ avec $y(0) = 3$.
2. $y' + y = 2e^x$ avec $y(0) = 0$.
3. $y' - 3y = 2e^{3x}$ avec $y(1) = 4e^3$.
4. $y' - y = x + e^x$ avec $y(0) = -1$.
5. $3y' - 2y = 3 \cos(2x)$ avec $y(0) = \frac{17}{20}$.
6. $y' + y = 2xe^{-x}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2. Soit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Etablir que les solutions de $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\operatorname{sh}(x)y'(x) - \operatorname{ch}(x)y(x) = 1.$$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 8y' + 15y = 15x^2 - 16x + 17$ avec $y(0) = 3$, $y'(1) = 2(1 + 3e^3)$.
2. $y'' - \sqrt{2}y' + y = x + 1$ avec $y(0) = 1 + \sqrt{2}$, $y'(0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. $y'' + y' - 6y = 4e^x$ avec $y(0) = -1$, $y'(0) = -21$.
4. $y'' - 4y' + 4y = -6e^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
5. $y'' - 4y = x + e^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
6. $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin(x)$ avec $y(0) = 6$, $y''(0) = 0$.
7. $y'' - 2y' + 2y = 5 \cos(x)$ avec $y(0) = 2$, $y(\frac{\pi}{2}) = -2(e^{\pi/2} + 1)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants où x , y et z sont des fonctions de la variable t .

1.
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

Exercice 6. Justifier l'existence d'une solution et résoudre le système d'équations différentielles suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) + t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) + 2t, \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. Discuter l'ensemble des solutions de l'équation suivante et déterminer les solutions développables en série entière :

$$2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 8. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$ avec $y(0) = 5$.
2. $y' - 2xy = e^{x^2} \sin(x)$ avec $y(0) = 1$.
3. $y' - \cos(x)y = \cos(x)$ avec $y(0) = 0$.
4. $y' - \cos(x)y = \sin(2x)$ avec $y(0) = -1$.
5. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 3x^2 \sin^2(x)$ avec $y'(0) = 2$.
6. $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ avec $x \in]-1, 1[$.
7. $(1 + x^2)y' + xy - 2x = 0$ avec $y(1) = 3$.
8. $x(x - 1)y' - (2x - 1)y + x^2 = 0$ avec $x > 0$.

Exercice 9. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$(E) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le wronskien de (y_1, y_2) .

Exercice 10.

1. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que toute solution y de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = h(t)$ converge vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $f'(t) + f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} l$. Montrer que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} l$.

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x(x + 1)y''(x) + (x + 2)y'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle $y(x) - xy'(x) = \frac{y^3}{4}$ avec pour condition $y(5) = \frac{5}{2}$.
Indication : reconnaître une équation de Bernoulli et poser en conséquence $z = \frac{1}{y^2}$.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle d'inconnue y une fonction dérivable d'un intervalle I dans \mathbb{R} :

$$(E) \quad (1 - x^2)y' - xy = 1.$$

1. Quels sont les intervalles I pour lesquels le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution ?
2. Sur chacun de ces intervalles résoudre (E) .

Exercice 14. On considère l'équation différentielle d'inconnue y une fonction dérivable d'un intervalle I dans \mathbb{R} :

$$(E) \quad 2x(1 - x)y' - (1 - x)y = 1.$$

1. Quels sont les intervalles I pour lesquels le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution ?
2. Sur chacun de ces intervalles résoudre (E) .
3. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $] - \infty, 1[$.
4. Existe-t-il une solution de (E) sur \mathbb{R} ?