

Feuille 3. Le calcul différentiel.

Exercice 1.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f : E \rightarrow F$ et $y_0 \in F$ tels que $\forall x \in E, f(x) = y_0$ (f est une application constante). Montrer que f est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Pour E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, montrer que toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
3. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 1$, définie par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = A^3$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.
4. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$, telle qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et calculer $d_0 f$.

Exercice 2.

1. Soit E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Montrer que $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, N(x) = \|x\|_2^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|\cdot\|$ une norme quelconque de E . Montrer que $\|\cdot\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 3. Justifier que les deux fonctions suivantes sont différentiables, calculer leurs gradients et en déduire leurs différentielles,

$$f(x, y, z) = 2 + 3z + xy + z \sin(x^2 + y^2), \quad g(x, y) = 1 + x\sqrt{y^2 + 2}.$$

Exercice 4. Calculer la jacobienne des applications suivantes,

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= (\sin(xyz), x + e^z, y + z), & f_2(x, y, z) &= (x \operatorname{ch}(y), e^y \cos(z)), \\ f_3(x, y, z) &= e^{xy} (\cos(z) + \sin(y)), & f_4(x, y) &= (x, ye^x, xy^2), \\ f_5(x) &= (e^x, x^3, \cos(x)), & f_6(x, y) &= x^2 - 3xy + y^2 \\ f_7(x, y) &= y^x, & f_8(x, y, z) &= z \arctan(y/x), \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ une application différentiable. On définit

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\rightarrow E, & \text{et } v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow E \\ x &\mapsto f(x, -x) & (x, y) &\mapsto f(y, x). \end{aligned}$$

Montrer que u et v sont différentiables et calculer leurs différentielles en fonction de la différentielle de f , puis de ses dérivées partielles et enfin du gradient de f lorsque $E = \mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application et a un point de E . Pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, on définit la dérivée dans la direction u au point a par,

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Montrer que lorsque f est différentiable en a cette limite existe et l'exprimer en fonction de $d_a f$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par, $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$. Justifier que f est différentiable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D_u f(1, 0) = u$.

Exercice 7. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés de dimension finie. On rappelle que pour toute application bilinéaire $B : E \times F \rightarrow G$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|B(x, y)\|_G \leq c \|x\|_E \|y\|_F$.

1. Montrer que B est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle.
2. Soient $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : H \rightarrow E$ et $g : H \rightarrow F$ deux applications différentiables. Montrer que $b : H \rightarrow G$ définie par

$$\forall x \in H, \quad b(x) = B(f(x), g(x)),$$

est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celle de f et de g .

Exercice 8. On considère,

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$, que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent et les calculer.
3. Soit

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} f(t, t^2) & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que γ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $\gamma'(0)$.

4. En déduire à l'aide des deux précédentes questions que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en $(0, 0)$, admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 10. Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 . On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto f \circ u(r, \theta).$$

où u est définie par :

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

1. Justifier que g est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f .
2. Calculer, en inversant une certaine matrice, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Déterminer toutes les fonctions \mathcal{C}^1 vérifiant

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 11.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Indication : poser $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit u un endomorphisme de E symétrique, id est, $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

1. Montrer que l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E, f(x) = \langle u(x), x \rangle$, est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Etablir que l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$, est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u .

Exercice 13. Soient E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|\cdot\|, a \in E$ et

$$f : E \setminus \{a\} \rightarrow E \\ x \mapsto \frac{a-x}{\|x-a\|^2}.$$

Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{a\}$, calculer sa différentielle et montrer que

$$d_x f(h) = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}$$

où S est la symétrie orthogonale d'axe $x - a$.

Exercice 14. Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions suivantes définies de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$f_1(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2,$$

$$f_3(x, y) = x^4 + x^2y - x^2 - y,$$

$$f_4(x, y) = x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x + 3,$$

$$f_5(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Indication : pour les minimums globaux de f_5 poser $u = x - y$ et $v = x + y$ et montrer que $f_5(x, y) \geq \frac{u^4 - 16u^2}{8}$.

Exercice 15. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$ par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$