

Colle du 18/09
Logique et raisonnements - Calculs dans \mathbb{R}

Sujet 1

Question de cours. Donner et définir les trois caractéristiques de la relation d'ordre \leq .

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel tel que $|x - 1| \leq 2$.

1. Montrer que $|x| \leq 3$.
2. Montrer que $|x^3 - 3x^2 - 4| \leq 58$.
3. Montrer que $|x \cos(e^x) - 5| > 2$.
4. En déduire une majoration de $\left| \frac{x^3 - 3x^2 - 4}{x \cos(e^x) - 5} \right|$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux propriétés suivantes :

$$P_n : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n : 3 \text{ divise } 4^n + 1.$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow Q_n)$?

Sujet 2

Question de cours. Démontrer l'inégalité triangulaire dans \mathbb{R} .

Exercice 1. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et les deux propositions suivantes : A : « f est une fonction paire et impaire » et B : « f est la fonction nulle ». Montrer que $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 2. Soit $\varepsilon > 0$ un réel strictement positif. Déterminer un réel $\alpha \in]0, 1[$, en fonction de ε , de façon à ce que l'implication suivante soit vérifiée :

$$|x| \leq \alpha \Rightarrow \left| \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 5} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Sujet 3

Question de cours. Donner la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Pour un réel $x \in \mathbb{R}$ fixé, on considère les deux affirmations suivantes :

$$A : \text{« } \forall \varepsilon > 0, \quad x \leq \varepsilon \text{ »}; \quad B : \text{« } x \leq 0 \text{ »}.$$

Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 2. Soit $(x, y) \in]-1; 1]^2$.

1. Montrer que $|1 + xy| > 0$.
2. Montrer que

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1; 1[.$$

Exercice en surplus

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation suivante :

$$3x^2 - 3x - 4\sqrt{x^2 - x + 3} = 6.$$